3. СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД, НОРМА, ОРТОГОНАЛНОСТ

(3.1) Показати да је у сваком унитарном $\mathbb{U}$ (и еуклидском $\mathbb{E}$) простору испуњено следеће:

(а) само је нулти вектор ортогоналан на све векторе простора;

(б) ако за сваки вектор $|v\rangle$ тог простора важи: $\langle v_1|v\rangle = \langle v_2|v\rangle$, тада је: $|v_1\rangle = |v_2\rangle$.

(а) На основу четврте аксиоме дефиниције скаларног производа

$$\langle v|v\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; |v\rangle = |0\rangle$$

јасно је да је нулти вектор $|0\rangle$ ортогоналан на све векторе датог простора.

(б) Поступак почиње од задатог израза

$$\langle v_1|v\rangle = \langle v_2|v\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle v_1|v\rangle - \langle v_2|v\rangle = 0\,.$$

На основу треће аксиоме о антихомогености по првом фактору скаларног производа

$$\lambda^*\langle v_1|v_2\rangle = \langle \lambda\, v_1|v_2\rangle$$

бројем минус један може се помножити први фактор скаларног производа

$$\langle v_1|v\rangle + \langle (-1)\, v_2|v\rangle = 0\,,$$

док на основу друге аксиоме о дистрибутивности по првом фактору скаларног производа

$$\langle v_1|v_3\rangle + \langle v_2|v_3\rangle = \langle v_1 + v_2|v_3\rangle$$

следи да је

$$\langle v_1 - v_2|v\rangle = 0\,.$$

Коначно, на основу четврте аксиоме о строгој позитивности скаларног производа

$$\langle v|v\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; |v\rangle = |0\rangle$$

биће

$$|v_1\rangle - |v_2\rangle = 0$$

то јест задата два вектора морају бити једнаки

$$|v_1\rangle = |v_2\rangle\,.$$

(3.2) Какав треба да буде базис $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ да би, за унапред задати скаларни производ у $n-$димензионалном унитарном простору $\mathbb{U}$ произвољних вектора

$$|v'\rangle=\sum_i \xi_i|v_i\rangle \quad \text{и} \quad |v''\rangle=\sum_i \eta_i|v_i\rangle,$$

важила формула

$$\langle v'|v''\rangle=\sum_i \xi_i^*\eta_i\,?$$

Скаларни производ горе задата два вектора једнак је

$$\langle v'|v''\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n \xi_i\langle v_i|\left|\sum_{j=1}^n \eta_j|v_j\rangle\right.\right\rangle=\sum_{i=1}^n \xi_i\left\langle v_i\left|\sum_j \eta_j|v_j\rangle\right.\right\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \xi_i^*\eta_j\langle v_i|v_j\rangle=\dots$$

Вредност скаларног производа произвољних вектора зависиће од тога чему је једнак скаларни производ $\langle v_i|v_j\rangle$ базних вектора; постоје три важне могућности, зависно од тога какав је базис

(а) базис $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ је *ортонормиран*: $\langle v_i|v_j\rangle=\delta_{ij}$;

(б) базис $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ *није ортогоналан*: $\langle v_i|v_j\rangle=\alpha_{ij}$;

(в) базис $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ *јесте ортогоналан*, али *није нормиран*: $\begin{cases}\langle v_i|v_j\rangle=0\\ \langle v_i|v_i\rangle=\beta_i\end{cases}$

Узимањем све три наведене могућности у обзир, следи

$$\dots=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij}=\sum_{i=1}^n \xi_i^*\eta_i$$

$$\dots=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \xi_i^*\eta_j\,\alpha_{ij}$$

$$\dots=\sum_{i=1}^n \xi_i^*\eta_i\,\beta_i$$

Будући да само први израз одговара поставци задатка, јасно је да базис $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ мора бити ортонормиран да би скаларни производ био наведеног облика.

(3.3) Показати да, ако би се у дефиницији скаларног производа (за комплексне просторе) захтевала *обична симетрија* (уместо ермитске), у таквим просторима не би постојао ни један ортонормирани базис.

Нека је дат ортонормирани базис $\{|v_i\rangle\}$ у векторском простору $\mathbb{V}$.

Скаларни производ вектора $|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle$ са самим собом сигурно је позитиван

$$\langle v|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \xi_i = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \geq 0$$

(под условом да важи први постулат ермитске симетрије скаларног производа) те је у складу са четвртим постулатом скаларног производа.

Ако не би важио постулат ермитске симетрије већ, рецимо, обичне симетрије, било би

$$\langle v|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle v_i | \middle| \sum_{j=1}^{n} \xi_j |v_j\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \xi_j \langle v_i | v_j\rangle$$

те би у том случају скаларни производ могао бити и *негативан*, што би било у супротности са четвртим постулатом скаларног производа; да се то не би догодило, векторски простор $\mathbb{V}$ не би смео да има ортонормирани базис

$$\langle v_i | v_j\rangle \neq \delta_{ij} .$$

(3.4) Да ли је, у векторском простору реалних функција реалне промењиве дефинисаних на сегменту $[a,b]$, *скаларни производ* дат изразом

$$\langle v_1(t)|v_2(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b v_1(t)\, v_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\,,\quad v_1(t), v_2(t) \in \mathbb{R}\,,\quad t\in\mathbb{R}$$

где је $g(t)$ тежинска функција која је унапред задата, непрекидна и на сегменту $[a,b]$ строго позитивна?

Да би задати израз представљао скаларни производ, мора да задовољи сва четири постулата за то

(1.) *Ермитска симетрија* се у простору $\mathbb{R}$ своди на обичну симетрију

$$\langle v_1(t)|v_2(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b v_1(t)\, v_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b v_2(t)\, v_1(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \langle v_2(t)|v_1(t)\rangle$$

(2.) *Антилинеарност по првом фактору* скаларног производа у простору $\mathbb{R}$ постаје линеарност по првом фактору

$$\langle \alpha\, v_1(t)|v_2(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b \alpha\, v_1(t)\, v_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \alpha\int_a^b v_1(t)\, v_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \alpha\,\langle v_1(t)|v_2(t)\rangle$$

(3.) *Дистрибутивност у односу на сабирање по првом фактору* остаје неизмењена

$$\langle v_1(t)+v_2(t)|v_3(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b [v_1(t)+v_2(t)]\, v_3(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b v_1(t)\, v_3(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_a^b v_2(t)\, v_3(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \langle v_1(t)|v_3(t)\rangle + \langle v_2(t)|v_3(t)\rangle$$

(4.) *Строга позитивност* скаларног производа такође остаје иста

$$\langle v(t)|v(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b v(t)\, v(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b v^2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$$

будући да је квадрат функције било ког знака позитиван, а тежинска функција је у поставци задатка и дефинисана као позитивна; уз то је

$$\langle v(t)|v(t)\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b v(t)\, v(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = 0 \;\Rightarrow\; v(t) = 0\,.$$

Значи, задати израз заиста испуњава све постулате скаларног производа.

(3.5) Нека је $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ коначан скуп вектора унитарног простора $\mathbb{U}$. Детерминанта чији су елементи $g_{ij}=\langle v_i|v_j\rangle$ је *Грамова*; показати да је дотична једнака нули ако је $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ скуп линеарно зависних вектора.

Грамова детерминанта је дата формулом

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Да би се могло показати да је Грамова детерминанта једнака нули када је скуп вектора линеарно зависан, треба почети са изразом

$$\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle=|0\rangle$$

од кога се може добити систем од n једначина са n непознатих формирањем скаларног производа датог израза са појединачним векторима датог скупа

$$\begin{cases}\big\langle\langle v_1|\,|\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle\big\rangle=\langle v_1|0\rangle\\ \big\langle\langle v_2|\,|\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle\big\rangle=\langle v_2|0\rangle\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \big\langle\langle v_n|\,|\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle\big\rangle=\langle v_n|0\rangle\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\langle v_1|v_1\rangle+\alpha_2\langle v_1|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n\langle v_1|v_n\rangle=0\\ \alpha_1\langle v_2|v_1\rangle+\alpha_2\langle v_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n\langle v_2|v_n\rangle=0\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \alpha_1\langle v_n|v_1\rangle+\alpha_2\langle v_n|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n\langle v_n|v_n\rangle=0\end{cases}$$

Добијени систем једначина може се записати у облику матричног израза

$$\begin{bmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}_{n\times 1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Да би скуп вектора $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ био линеарно зависан мора барем један од скалара у изразу $\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\ldots+\alpha_n|v_n\rangle=|0\rangle$ бити различит од нуле, што значи да матрица-колона с леве стране има барем један матрични елемент различит од нуле. У том случају, да би леви матрични израз био једнак нултој матрици-колони, детерминанта квадратне матрице с леве стране мора бити једнака нули

$$\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}=0$$

а то је, наравно, управо Грамова детерминанта.

(3.6) Помоћу Грамове детерминанте проверити да ли су следећи скупови вектора из $\mathbb{R}^3$ *линеарно зависни*

(а) $\{(2,0,-1),(0,1,1),(2,2,1)\}$;

(б) $\{(1,1,1),(1,1,3),(2,2,3)\}$;

(в) $\{(2,1,0),(0,2,1),(1,0,2)\}$.

(а) Задати су следећи вектори (као уређене тројке реалних бројева)

$$\{|v_1\rangle=(2,0,-1),|v_2\rangle=(0,1,1),|v_3\rangle=(2,2,1)\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\begin{aligned}
\langle v_1|v_1\rangle&=\big((2,0,-1),(2,0,-1)\big)=2^*\cdot 2+0^*\cdot 0+(-1)^*\cdot(-1)=4+1=5\\
\langle v_1|v_2\rangle&=\big((2,0,-1),(0,1,1)\big)=2^*\cdot 0+0^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1=-1\\
\langle v_1|v_3\rangle&=\big((2,0,-1),(2,2,1)\big)=2^*\cdot 2+0^*\cdot 2+(-1)^*\cdot 1=4-1=3\\
\langle v_2|v_1\rangle&=\big((0,1,1),(2,0,-1)\big)=0^*\cdot 2+1^*\cdot 0+1^*\cdot(-1)=-1\\
\langle v_2|v_2\rangle&=\big((0,1,1),(0,1,1)\big)=0^*\cdot 0+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1=2\\
\langle v_2|v_3\rangle&=\big((0,1,1),(2,2,1)\big)=0^*\cdot 2+1^*\cdot 2+1^*\cdot 1=2+1=3\\
\langle v_3|v_1\rangle&=\big((2,2,1),(2,0,-1)\big)=2^*\cdot 2+2^*\cdot 0+1^*\cdot(-1)=4-1=3\\
\langle v_3|v_2\rangle&=\big((2,2,1),(0,1,1)\big)=2^*\cdot 0+2^*\cdot 1+1^*\cdot 1=2+1=3\\
\langle v_3|v_3\rangle&=\big((2,2,1),(2,2,1)\big)=2^*\cdot 2+2^*\cdot 2+1^*\cdot 1=4+4+1=9
\end{aligned}$$

Грамова детерминанта је једнака

$$\begin{aligned}
G\big(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\big)&=\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 9\end{vmatrix}\\
&=5\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 9\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\
&=5\cdot(2\cdot 9-3\cdot 3)+(-1\cdot 9-3\cdot 3)+3\cdot(-1\cdot 3-2\cdot 3)\\
&=5\cdot(18-9)+(-9-9)+3\cdot(-3-6)\\
&=5\cdot 9-2\cdot 9+3\cdot(-9)=(5-2-3)\cdot 9=0\cdot 9=0
\end{aligned}$$

Скуп задатих вектора $\{|v_1\rangle=(2,0,-1),|v_2\rangle=(0,1,1),|v_3\rangle=(2,2,1)\}$ је *линеарно зависан*, јер је Грамова детерминанта једнака нули.

(б) Задати су следећи вектори (као уређене тројке реалних бројева)

$$\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (1,1,1), \left| v_2 \right\rangle = (1,1,3), \left| v_3 \right\rangle = (2,2,3) \right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\left\langle v_1 \middle| v_1 \right\rangle = \big((1,1,1),(1,1,1)\big) = 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 = 3$$
$$\left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \big((1,1,1),(1,1,3)\big) = 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 3 = 5$$
$$\left\langle v_1 \middle| v_3 \right\rangle = \big((1,1,1),(2,2,3)\big) = 1^* \cdot 2 + 1^* \cdot 2 + 1^* \cdot 3 = 7$$
$$\left\langle v_2 \middle| v_1 \right\rangle = \big((1,1,3),(1,1,1)\big) = 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 3^* \cdot 1 = 5$$
$$\left\langle v_2 \middle| v_2 \right\rangle = \big((1,1,3),(1,1,3)\big) = 1^* \cdot 1 + 1^* \cdot 1 + 3^* \cdot 3 = 11$$
$$\left\langle v_2 \middle| v_3 \right\rangle = \big((1,1,3),(2,2,3)\big) = 1^* \cdot 2 + 1^* \cdot 2 + 3^* \cdot 3 = 13$$
$$\left\langle v_3 \middle| v_1 \right\rangle = \big((2,2,3),(1,1,1)\big) = 2^* \cdot 1 + 2^* \cdot 1 + 3^* \cdot 1 = 7$$
$$\left\langle v_3 \middle| v_2 \right\rangle = \big((2,2,3),(1,1,3)\big) = 2^* \cdot 1 + 2^* \cdot 1 + 3^* \cdot 3 = 13$$
$$\left\langle v_3 \middle| v_3 \right\rangle = \big((2,2,3),(2,2,3)\big) = 2^* \cdot 2 + 2^* \cdot 2 + 3^* \cdot 3 = 17$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\big(\left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle, \left| v_3 \right\rangle\big) = \begin{vmatrix} \left\langle v_1 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_1 \middle| v_3 \right\rangle \\ \left\langle v_2 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_2 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_2 \middle| v_3 \right\rangle \\ \left\langle v_3 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_3 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_3 \middle| v_3 \right\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 13 \\ 7 & 13 & 17 \end{vmatrix}$$

Према *Мек-Милановом развоју детерминанте 3. реда* ($a_{22} = 11 \neq 0$) је

$$G\big(\left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle, \left| v_3 \right\rangle\big) = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 17 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 33-25 & 65-77 \\ 65-77 & 187-169 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{11} \begin{vmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{11}(144-144) = 0$$
$$= 5 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 3) + (-1 \cdot 9 - 3 \cdot 3) + 3 \cdot (-1 \cdot 3 - 2 \cdot 3)$$
$$= 5 \cdot (18-9) + (-9-9) + 3 \cdot (-3-6)$$
$$= 5 \cdot 9 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-9) = (5-2-3) \cdot 9 = 0 \cdot 9 = 0$$

Скуп задатих вектора $\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (1,1,1), \left| v_2 \right\rangle = (1,1,3), \left| v_3 \right\rangle = (2,2,3) \right\}$ је *линеарно зависан*, пошто је Грамова детерминанта једнака нули.

(в) Задати су следећи вектори (као уређене тројке реалних бројева)

$$\left\{ |v_1\rangle = (2,1,0), |v_2\rangle = (0,2,1), |v_3\rangle = (1,0,2) \right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\langle v_1|v_1\rangle = \big((2,1,0),(2,1,0)\big) = 2^*\cdot 2 + 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0 = 5$$
$$\langle v_1|v_2\rangle = \big((2,1,0),(0,2,1)\big) = 2^*\cdot 0 + 1^*\cdot 2 + 0^*\cdot 1 = 2$$
$$\langle v_1|v_3\rangle = \big((2,1,0),(1,0,2)\big) = 2^*\cdot 1 + 1^*\cdot 0 + 0^*\cdot 2 = 2$$
$$\langle v_2|v_1\rangle = \big((0,2,1),(2,1,0)\big) = 0^*\cdot 2 + 2^*\cdot 1 + 1^*\cdot 0 = 2$$
$$\langle v_2|v_2\rangle = \big((0,2,1),(0,2,1)\big) = 0^*\cdot 0 + 2^*\cdot 2 + 1^*\cdot 1 = 5$$
$$\langle v_2|v_3\rangle = \big((0,2,1),(1,0,2)\big) = 0^*\cdot 1 + 2^*\cdot 0 + 1^*\cdot 2 = 2$$
$$\langle v_3|v_1\rangle = \big((1,0,2),(2,1,0)\big) = 1^*\cdot 2 + 0^*\cdot 1 + 2^*\cdot 0 = 2$$
$$\langle v_3|v_2\rangle = \big((1,0,2),(0,2,1)\big) = 1^*\cdot 0 + 0^*\cdot 2 + 2^*\cdot 1 = 2$$
$$\langle v_3|v_3\rangle = \big((1,0,2),(1,0,2)\big) = 1^*\cdot 1 + 0^*\cdot 0 + 2^*\cdot 2 = 5$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\big(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\big) = \begin{vmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Према *Мек-Милановом развоју детерминанте 3. реда* ($a_{22} = 5 \neq 0$) је

$$G\big(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\big) = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 25-4 & 4-10 \\ 4-10 & 25-4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 21 & -6 \\ -6 & 21 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(441-36) = \frac{405}{5} = \frac{400}{5} + \frac{5}{5} = 81 \neq 0$$

Скуп задатих вектора $\left\{ |v_1\rangle = (2,1,0), |v_2\rangle = (0,2,1), |v_3\rangle = (1,0,2) \right\}$ је *линеарно независан*, јер је Грамова детерминанта различита од нуле.

(3.7) Помоћу Грамове детерминанте испитати *линеарну зависност* следећих скупова вектора из $\mathbb{C}^3$

(а) $\{(1,-i,i),(2,2,i),(1,0,1)\}$;

(б) $\{(i,i,-i),(1,i,-1),(4i,0,3)\}$;

(в) $\{(i,0,-i),(-i,i,0),(0,-i,i)\}$.

(а) Задати су следећи вектори (као уређене тројке комплексних бројева)

$$\{|v_1\rangle=(1,-i,i),|v_2\rangle=(2,2,i),|v_3\rangle=(1,0,1)\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\begin{aligned}
\langle v_1|v_1\rangle&=\big((1,-i,i),(1,-i,i)\big)=1^*\cdot 1+(-i)^*\cdot(-i)+i^*\cdot i=1-i^2-i^2=3\\
\langle v_1|v_2\rangle&=\big((1,-i,i),(2,2,i)\big)=1^*\cdot 2+(-i)^*\cdot 2+i^*\cdot i=2+2i-i^2=3+2i\\
\langle v_1|v_3\rangle&=\big((1,-i,i),(1,0,1)\big)=1^*\cdot 1+(-i)^*\cdot 0+i^*\cdot 1=1-i\\
\langle v_2|v_1\rangle&=\big((2,2,i),(1,-i,i)\big)=2^*\cdot 1+2^*\cdot(-i)+i^*\cdot i=2-2i-i^2=3-2i\\
\langle v_2|v_2\rangle&=\big((2,2,i),(2,2,i)\big)=2^*\cdot 2+2^*\cdot 2+i^*\cdot i=4+4-i^2=9\\
\langle v_2|v_3\rangle&=\big((2,2,i),(1,0,1)\big)=2^*\cdot 1+2^*\cdot 0+i^*\cdot 1=2-i\\
\langle v_3|v_1\rangle&=\big((1,0,1),(1,-i,i)\big)=1^*\cdot 1+0^*\cdot(-i)+1^*\cdot i=1+i\\
\langle v_3|v_2\rangle&=\big((1,0,1),(2,2,i)\big)=1^*\cdot 2+0^*\cdot 2+1^*\cdot i=2+i\\
\langle v_3|v_3\rangle&=\big((1,0,1),(1,0,1)\big)=1^*\cdot 1+0^*\cdot 0+1^*\cdot 1=2
\end{aligned}$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\big(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\big)=\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 3+2i & 1-i\\ 3-2i & 9 & 2-i\\ 1+i & 2+i & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=3\cdot\begin{vmatrix}9 & 2-i\\ 2+i & 2\end{vmatrix}-(3+2i)\begin{vmatrix}3-2i & 2-i\\ 1+i & 2\end{vmatrix}+(1-i)\begin{vmatrix}3-2i & 9\\ 1+i & 2+i\end{vmatrix}\\
&=3\cdot\big[9\cdot 2-(2-i)(2+i)\big]-(3+2i)\big[2(3-2i)-(1+i)(2-i)\big]\\
&\qquad\qquad +(1-i)\big[(3-2i)(2+i)-9(1+i)\big]\\
&=3\cdot\big[18-(2^2-i^2)\big]+(3+2i)(2-i+2i-i^2-6-4i)+(1-i)(6+3i-4i-2i^2-9-9i)\\
&=3\cdot\big[18-(4+1)\big]+(3+2i)(-3-3i)+(1-i)(-1-10i)\\
&=3\cdot 13-9-9i-6i-6i^2-1-10i+i+10i^2=39-9+6-1+10+i(-9-6-10+1)\\
&=45-24i\neq 0
\end{aligned}$$

Скуп задатих вектора $\{|v_1\rangle=(1,-i,i),|v_2\rangle=(2,2,i),|v_3\rangle=(1,0,1)\}$ је *линеарно независан*, јер је Грамова детерминанта различита од нуле.

(б) Задати су следећи вектори (као уређене тројке комплексних бројева)

$$\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (i, i, -i), \left| v_2 \right\rangle = (1, i, -1), \left| v_3 \right\rangle = (4i, 0, 3) \right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\begin{aligned}
\left\langle v_1 \middle| v_1 \right\rangle &= \big((i,i,-i),(i,i,-i)\big) = i^* \cdot i + i^* \cdot i + (-i)^* \cdot (-i) = -i^2 - i^2 - i^2 = 3 \\
\left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle &= \big((i,i,-i),(1,i,-1)\big) = i^* \cdot 1 + i^* \cdot i + (-i)^* \cdot (-1) = i - i^2 - i = 1 - 2i \\
\left\langle v_1 \middle| v_3 \right\rangle &= \big((i,i,-i),(4i,0,3)\big) = i^* \cdot 4i + i^* \cdot 0 + (-i)^* \cdot 3 = -4i^2 + 3i = 4 + 3i \\
\left\langle v_2 \middle| v_1 \right\rangle &= \big((1,i,-1),(i,i,-i)\big) = 1^* \cdot i + i^* \cdot i + (-1)^* \cdot (-i) = i - i^2 + i = 1 + 2i \\
\left\langle v_2 \middle| v_2 \right\rangle &= \big((1,i,-1),(1,i,-1)\big) = 1^* \cdot 1 + i^* \cdot i + (-1)^* \cdot (-1) = 1 - i^2 + 1 = 3 \\
\left\langle v_2 \middle| v_3 \right\rangle &= \big((1,i,-1),(4i,0,3)\big) = 1^* \cdot 4i + i^* \cdot 0 + (-1)^* \cdot 3 = 4i - 3 = -3 + 4i \\
\left\langle v_3 \middle| v_1 \right\rangle &= \big((4i,0,3),(i,i,-i)\big) = 4i^* \cdot i + 0^* \cdot i + 3^* \cdot (-i) = -4i^2 - 3i = 4 - 3i \\
\left\langle v_3 \middle| v_2 \right\rangle &= \big((4i,0,3),(1,i,-1)\big) = 4i^* \cdot 1 + 0^* \cdot i + 3^* \cdot (-1) = -4i - 3 = -3 - 4i \\
\left\langle v_3 \middle| v_3 \right\rangle &= \big((4i,0,3),(4i,0,3)\big) = 4i^* \cdot 4i + 0^* \cdot 0 + 3^* \cdot 3 = -16i^2 + 9 = 25
\end{aligned}$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\big(\left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle, \left|v_3\right\rangle\big) = \begin{vmatrix} \left\langle v_1 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_1 \middle| v_3 \right\rangle \\ \left\langle v_2 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_2 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_2 \middle| v_3 \right\rangle \\ \left\langle v_3 \middle| v_1 \right\rangle & \left\langle v_3 \middle| v_2 \right\rangle & \left\langle v_3 \middle| v_3 \right\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1-2i & 4+3i \\ 1+2i & 3 & -3+4i \\ 4-3i & -3-4i & 25 \end{vmatrix}.$$

Према *Мек-Милановом развоју детерминанте 3. реда* ($a_{22} = 3 \neq 0$) је

$$\begin{aligned}
G\big(\left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle, \left|v_3\right\rangle\big) &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1-2i & 4+3i \\ 3 & -3+4i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1+2i & 3 \\ 4-3i & -3-4i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -3+4i \\ -3-4i & 25 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 9-(1-2i)(1+2i) & (1-2i)(-3+4i)-3(4+3i) \\ (1+2i)(-3-4i)-3(4-3i) & 75-(-3-4i)(-3+4i) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 9-(1^2+4i^2) & -3+6i+4i-8i^2-12-9i \\ -3-6i-4i-8i^2-12+9i & 75-(3^2+4i^2) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 12 & 23+i \\ 7-i & 70 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\big[12 \cdot 70 - (23+i)(7-i)\big] = \frac{1}{3}(840 - 161 + 7i - 23i - i^2) \\
&= \frac{1}{3}(680 - 16i) \neq 0
\end{aligned}$$

Скуп задатих вектора $\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (i, i, -i), \left| v_2 \right\rangle = (1, i, -1), \left| v_3 \right\rangle = (4i, 0, 3) \right\}$ је *линеарно независан*, пошто је Грамова детерминанта различита од нуле.

(в) Задати су следећи вектори (као уређене тројке реалних бројева)

$$\left\{ |v_1\rangle = (i,0,-i), |v_2\rangle = (-i,i,0), |v_3\rangle = (0,-i,i) \right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\langle v_1|v_1\rangle = \left((i,0,-i),(i,0,-i)\right) = i^* \cdot i + 0^* \cdot 0 + (-i)^* \cdot (-i) = -i^2 - i^2 = 2$$
$$\langle v_1|v_2\rangle = \left((i,0,-i),(-i,i,0)\right) = i^* \cdot (-i) + 0^* \cdot i + (-i)^* \cdot 0 = i^2 = -1$$
$$\langle v_1|v_3\rangle = \left((i,0,-i),(0,-i,i)\right) = i^* \cdot 0 + 0^* \cdot (-i) + (-i)^* \cdot i = i^2 = -1$$
$$\langle v_2|v_1\rangle = \left((-i,i,0),(i,0,-i)\right) = (-i)^* \cdot i + i^* \cdot 0 + 0^* \cdot (-i) = i^2 = -1$$
$$\langle v_2|v_2\rangle = \left((-i,i,0),(-i,i,0)\right) = (-i)^* \cdot (-i) + i^* \cdot i + 0^* \cdot 0 = -i^2 - i^2 = 2$$
$$\langle v_2|v_3\rangle = \left((-i,i,0),(0,-i,i)\right) = (-i)^* \cdot 0 + i^* \cdot (-i) + 0^* \cdot i = i^2 = -1$$
$$\langle v_3|v_1\rangle = \left((0,-i,i),(i,0,-i)\right) = 0^* \cdot i + (-i)^* \cdot 0 + i^* \cdot (-i) = i^2 = -1$$
$$\langle v_3|v_2\rangle = \left((0,-i,i),(-i,i,0)\right) = 0^* \cdot (-i) + (-i)^* \cdot i + i^* \cdot 0 = i^2 = -1$$
$$\langle v_3|v_3\rangle = \left((0,-i,i),(0,-i,i)\right) = 0^* \cdot 0 + (-i)^* \cdot (-i) + i^* \cdot i = -i^2 - i^2 = 2$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle \\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Према *Мек-Милановом развоју детерминанте 3. реда* ($a_{22} = 2 \neq 0$) је

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4-1 & 1+2 \\ 1+2 & 4-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Скуп задатих вектора $\left\{ |v_1\rangle = (i,0,-i), |v_2\rangle = (-i,i,0), |v_3\rangle = (0,-i,i) \right\}$ је *линеарно зависан*, јер је Грамова детерминанта једнака нули.

(3.8) Преко Грамове детерминанте одредити да ли су следеће матрице *линеарно зависне*

(а) из $\mathbb{C}^{22}$: $\left\{\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$;

(б) из $\mathbb{R}^{22}$: $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(а) Задати су следећи вектори (као квадратне матрице)

$$\left\{|v_1\rangle=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},|v_2\rangle=\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix},|v_3\rangle=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},|v_4\rangle=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\langle v_1|v_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\right)=5$$

$$\langle v_1|v_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}-2i & 0\\ 0 & 2i\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_1|v_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_1|v_4\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_2|v_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_2|v_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=5$$

$$\langle v_2|v_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 4i\\ -i & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_2|v_4\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & -2i\\ -i & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_3|v_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_3|v_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & i\\ -2i & 0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & i\\ -4i & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle v_3|v_3\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\right) = 5$$

$$\langle v_3|v_4\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\right) = -1$$

$$\langle v_4|v_1\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\langle v_4|v_2\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&i\\-2i&0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&i\\-2i&0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&i\\2i&0\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\langle v_4|v_3\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\right) = -1$$

$$\langle v_4|v_4\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = 2$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle,|v_4\rangle) = \begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle & \langle v_1|v_4\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle & \langle v_2|v_4\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle & \langle v_3|v_4\rangle\\ \langle v_4|v_1\rangle & \langle v_4|v_2\rangle & \langle v_4|v_3\rangle & \langle v_4|v_4\rangle\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&-1\\0&0&-1&2\end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix}5&0&0\\0&5&-1\\0&-1&2\end{vmatrix} = 5\cdot5\cdot\begin{vmatrix}5&-1\\-1&2\end{vmatrix} = 25\cdot(10-1) = 25\cdot 9 \neq 0$$

Скуп задатих вектора

$$\left\{|v_1\rangle = \begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}, |v_2\rangle = \begin{bmatrix}0&i\\-2i&0\end{bmatrix}, |v_3\rangle = \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}, |v_4\rangle = \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$$

линеарно је независан, јер је Грамова детерминанта различита од нуле.

* * *

(б) Задати су следећи вектори (као квадратне матрице)

$$\left\{|v_1\rangle = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, |v_2\rangle = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, |v_3\rangle = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}.$$

Сада треба одредити вредности свих скаларних производа који фигуришу у Грамовој детерминанти

$$\langle v_1|v_1\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\langle v_1|v_2\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_1|v_3\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_2|v_1\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_2|v_2\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\langle v_2|v_3\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_3|v_1\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_3|v_2\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\langle v_3|v_3\rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = 3$$

Грамова детерминанта је једнака

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle,|v_4\rangle\right) = \begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 2\\2 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Према *Мек-Милановом развоју детерминанте 3. реда* ($a_{22} = 3 \neq 0$) је

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle,|v_4\rangle\right) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{vmatrix} = \frac{21}{3} = 7 \neq 0 .$$

Скуп задатих вектора

$$\left\{|v_1\rangle = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, |v_2\rangle = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, |v_3\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

линеарно је независан, јер је Грамова детерминанта различита од нуле.

(3.9) Показати да је Грамова детерминанта произвољна три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ једнака *квадрату мешовитог производа* ових вектора; потом на основу тога извести критеријум за *линеарну зависност три вектора* из поменутог векторског простора.

Нека су произвољна три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ дата изразима

$$\left\{ \left| v_1 \right\rangle = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \left| v_2 \right\rangle = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \left| v_3 \right\rangle = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \right\}.$$

У том случају Грамова детерминанта

$$G\left(\left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle, \left| v_3 \right\rangle \right) = \begin{vmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \langle v_1 | v_3 \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_3 \rangle \\ \langle v_3 | v_1 \rangle & \langle v_3 | v_2 \rangle & \langle v_3 | v_3 \rangle \end{vmatrix}$$

гласи, уз узимање у обзир да се ермитска симетрија скаларног производа своди на обичну симетрију у векторском простору $\mathbb{R}^3$

$$G\left(\left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle, \left| v_3 \right\rangle \right) = \begin{vmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 & \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 & \xi_1\mu_1 + \xi_2\mu_2 + \xi_3\mu_3 \\ \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \eta_3\xi_3 & \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 & \eta_1\mu_1 + \eta_2\mu_2 + \eta_3\mu_3 \\ \mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \mu_3\xi_3 & \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3 & \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \end{vmatrix}.$$

Добијена детерминанта се може написати као производ две детерминанте

$$G\left(\left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle, \left| v_3 \right\rangle \right) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \mu_3 \end{vmatrix} = D\tilde{D} = D^2$$

где је D детерминанта мешовитог производа три дата вектора.

Критеријум: да би три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ били *линеарно зависни* међусобно, детерминанта мешовитог производа та три вектора мора бити једнака нули.

(3.10) Испитати како се Грамова детерминанта мења при следећим *трансформацијама*

(а) два вектора *измене места*;

(б) неки од датих вектора се *помножи скаларом*.

Општи облик Грамове детерминанте дат је изразом

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right)=\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle\end{vmatrix}$$

* * *

(а) Када два вектора измене места, Грамова детерминанта постаје

$$G\left(|v_2\rangle,|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\begin{vmatrix}\langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_1\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_1\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_2\rangle & \langle v_n|v_1\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Изменом места прве две колоне, свака па и Грамова детерминанта мења свој знак

$$G\left(|v_2\rangle,|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=(-1)\begin{vmatrix}\langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Изменом места прве две врсте, свака па и Грамова детерминанта мења свој знак

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=(-1)(-1)\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Јасно је да се при измени места двају вектора Грамова детерминанта *не мења*

$$G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right)=\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \langle v_1|v_3\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \langle v_2|v_3\rangle\\ \langle v_3|v_1\rangle & \langle v_3|v_2\rangle & \langle v_3|v_3\rangle\end{vmatrix}$$

* * *

(б) Када се један од вектора помножи скаларом, Грамова детерминанта постаје

$$G\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\begin{vmatrix}\langle \alpha v_1|\alpha v_1\rangle & \langle \alpha v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle \alpha v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|\alpha v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|\alpha v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Пошто је скаларни производ *антихомоген по првом фактору*, следи

$$G\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\begin{vmatrix}\alpha^*\langle v_1|\alpha v_1\rangle & \alpha^*\langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \alpha^*\langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|\alpha v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|\alpha v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Детерминанта се множи скаларом тако што се једна њена колона или једна врста множи тим скаларом, те је

$$G\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\alpha^*\begin{vmatrix}\langle v_1|\alpha v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|\alpha v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|\alpha v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Пошто је скаларни производ *хомоген по другом фактору*, биће

$$G\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\alpha^*\begin{vmatrix}\alpha\langle v_1|\alpha v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \alpha\langle v_2|\alpha v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\langle v_n|\alpha v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}$$

Детерминанта се множи скаларом тако што се једна њена колона или једна врста множи тим скаларом, те је коначно

$$G\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right)=\alpha^*\alpha\begin{vmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{vmatrix}=|\alpha|^2\,G\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right).$$

Значи да се, при множењу једног вектора Грамове детерминанте скаларом, *цела Грамова детерминанта множи квадратом модула тог скалара*.

(3.11) Показати да за Грамову детерминанту важи *двострука неједнакост*

$$0 \le G\left(|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right) \le \left\||v_1\rangle\right\|^2 \cdot \left\||v_2\rangle\right\|^2 \cdot \ldots \cdot \left\||v_n\rangle\right\|^2,$$

при чему на десној страни важи *једнакост* ако је неки од датих вектора *нулти вектор* или ако су сви вектори *међусобно ортогонални*.

Ако је неки од вектора *нулти вектор*, Грамова детерминанта је увек једнака нули, без обзира на то који од вектора је једнак нули, нпр. ако је први вектор једнак нултом, бива

$$G\left(|0\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle 0|0\rangle & \langle 0|v_2\rangle & \ldots & \langle 0|v_n\rangle \\ \langle v_2|0\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|0\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{vmatrix} = 0 \cdot G\left(|v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right) = 0$$

Ако су сви вектори *међусобно ортогонални*, Грамова детерминанта је увек једнака производу квадрата норми свих вектора

$$G\left(|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \ldots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \left\||v_1\rangle\right\|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \left\||v_2\rangle\right\|^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \left\||v_n\rangle\right\|^2 \end{vmatrix} = \left\||v_1\rangle\right\|^2 \cdot \left\||v_2\rangle\right\|^2 \cdot \ldots \cdot \left\||v_n\rangle\right\|^2$$

(3.12) Коришћењем резултата претходног задатка, доказати *Кошијеву неједнакост*

$$\left|\langle v_1|v_2\rangle\right| \le \left\| |v_1\rangle \right\| \cdot \left\| |v_2\rangle \right\|, \ \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{U};$$

где једнакост важи ако је $|v_1\rangle = \alpha |v_2\rangle$.

Грамова детерминанта за два вектора гласи

$$G\left(|v_1\rangle, |v_2\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left\| |v_1\rangle \right\|^2 & \langle v_1|v_2\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \left\| |v_2\rangle \right\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 - \langle v_1|v_2\rangle \langle v_2|v_1\rangle$$

$$= \left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 - \langle v_1|v_2\rangle \langle v_1|v_2\rangle^*$$

$$= \left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 - \left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2$$

Из претходних задатака је знано да је Грамова детерминанта једнака нули ако су вектори *линеарно зависни* ($|v_1\rangle = \alpha |v_2\rangle$), стога је

$$\left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 - \left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2 = \left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\langle v_1|v_2\rangle\right| = \left\| |v_1\rangle \right\| \cdot \left\| |v_2\rangle \right\| .$$

Из претходних задатака је такође знано да је Грамова детерминанта већа од нуле ако су вектори *линеарно независни* ($|v_1\rangle \ne \alpha |v_2\rangle$), те је

$$\left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 - \left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2 < \left\| |v_1\rangle \right\|^2 \left\| |v_2\rangle \right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\langle v_1|v_2\rangle\right| < \left\| |v_1\rangle \right\| \cdot \left\| |v_2\rangle \right\| .$$

(3.13) Испитати да ли у векторском простору $\mathbb{C}^{22}$ *Паулијеве матрице*

$$|E\rangle=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ |\sigma_1\rangle=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ |\sigma_2\rangle=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\ |\sigma_3\rangle=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

образују *базис*, потом тај базис *ортонормирати*, те на крају у таквом Паулијевом базису написати *матрицу* која одговара матрици

$$\begin{bmatrix}2&3\\i&0\end{bmatrix}$$

у апсолутном базису

$$|\mathrm{e}_1\rangle=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_2\rangle=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_3\rangle=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ |\mathrm{e}_4\rangle=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Под један: дате Паулијеве матрице образоваће један *базис* векторског простора $\mathbb{C}^{22}$ ако су *линеарно независне*, што значи да њихова Грамова детерминанта мора бити *различита од нуле*.

Прво треба одредити све међусобне скаларне производе датих матрица

$$\langle E|E\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\langle E|\sigma_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle E|\sigma_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle E|\sigma_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle \sigma_1|E\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_2|E\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_2|\sigma_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}-i&0\\0&i\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_2|\sigma_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\langle\sigma_2|\sigma_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_3|E\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_3|\sigma_1\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_3|\sigma_2\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&-i\\-i&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\langle\sigma_3|\sigma_3\rangle=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2$$

Грамова детерминанта Паулијевих матрица различита је од нуле

$$G(|E\rangle,|\sigma_1\rangle,|\sigma_2\rangle,|\sigma_3\rangle)=\begin{vmatrix}\langle E|E\rangle&\langle E|\sigma_1\rangle&\langle E|\sigma_2\rangle&\langle E|\sigma_3\rangle\\\langle\sigma_1|E\rangle&\langle\sigma_1|\sigma_1\rangle&\langle\sigma_1|\sigma_2\rangle&\langle\sigma_1|\sigma_3\rangle\\\langle\sigma_2|E\rangle&\langle\sigma_2|\sigma_1\rangle&\langle\sigma_2|\sigma_2\rangle&\langle\sigma_2|\sigma_3\rangle\\\langle\sigma_3|E\rangle&\langle\sigma_3|\sigma_1\rangle&\langle\sigma_3|\sigma_2\rangle&\langle\sigma_3|\sigma_3\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=16\neq0,$$

те су Паулијеве матрице линеарно независне међусобно, а пошто их има четири, оне заиста чине *базис* четвородимензионалног векторског простора $\mathbb{C}^{22}$.

Под два: Из Грамове детерминанте се види да су Паулијеве матрице такође међусобно *ортогоналне*, те их треба само *нормирати*, односно поделити са њиховом нормом, која за све њих износи $\sqrt{2}$

$$|E\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ |\sigma_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ |\sigma_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\ |\sigma_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

чиме је добијен *базис* састављен од ортонормираних вектора (Паулијевих матрица).

Под три: задата квадратна матрица дата је у апсолутном базису

$$\begin{bmatrix}2&3\\i&0\end{bmatrix}_{\text{апс}}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=2|\mathrm{e}_1\rangle+3|\mathrm{e}_2\rangle+i|\mathrm{e}_3\rangle+0|\mathrm{e}_4\rangle.$$

Задата матрица ће у Паулијевом базису бити дата као линеарна комбинација Паулијевих матрица са непознатим коефицијентима

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}_{\text{Паули}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \alpha |E\rangle + \beta |\sigma_1\rangle + \gamma |\sigma_2\rangle + \delta |\sigma_3\rangle .$$

Без обзира у ком базису била дата, матрица је увек једнака самој себи, те је

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ i & 0 \end{bmatrix}_{\text{апс}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}_{\text{Паули}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{апс}} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\text{апс}} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}_{\text{апс}} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\text{апс}}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha+\delta & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha - \delta \end{bmatrix}_{\text{апс}}$$

Два матрице су једнаке ако су им једнаки одговарајући матрични елементи, чиме се добија систем од четири једначине са четири непознате

$$\underline{\begin{cases} \alpha+\delta = 2 \\ \beta - i\gamma = 3 \\ \beta + i\gamma = i \\ \alpha - \delta = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta+\delta = 2 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ \beta + i\gamma = i \\ \alpha = \delta \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2\delta = 2 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ 3 + i\gamma + i\gamma = i \\ \alpha = \delta \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ 3 + 2i\gamma = i \\ \alpha = 1 \end{cases}}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ -3i + 2\gamma = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ 2\gamma = 1 + 3i \\ \alpha = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + i\gamma \\ 2\gamma = 1 + 3i \\ \alpha = 1 \end{cases}}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + i\dfrac{1+3i}{2} \\ \gamma = \dfrac{1+3i}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = 3 + \dfrac{-3+i}{2} \\ \gamma = \dfrac{1+3i}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \delta = 1 \\ \beta = \dfrac{3+i}{2} \\ \gamma = \dfrac{1+3i}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}}$$

Значи да је матрица задата у апсолутном базису једнака следећој матрици у Паулијевом базису

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ i & 0 \end{bmatrix}_{\text{апс}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{3+i}{2} \\ \dfrac{1+3i}{2} & 1 \end{bmatrix}_{\text{Паули}} .$$

(3.14) У простору $\mathbb{T}^n$ дефинисан је скаларни производ

$$\langle P(t) | Q(t) \rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_0^{2\pi} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Показати да је један *ортонормирани базис* овог простора скуп функција

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt \right\}.$$

Полазни скуп функција

$$\{1, \cos t, \sin t, \ldots, \sin nt\}$$

образоваће базис ако су функције *линеарно независне* међусобно, тј. када је Грамова детерминанта *различита од нуле*

$$G(1, \cos t, \sin t, \ldots, \sin nt) = \begin{vmatrix} \langle 1|1\rangle & \langle 1|\cos t\rangle & \langle 1|\sin t\rangle & \ldots & \langle 1|\sin nt\rangle \\ \langle \cos t|1\rangle & \langle \cos t|\cos t\rangle & \langle \cos t|\sin t\rangle & \ldots & \langle \cos t|\sin nt\rangle \\ \langle \sin t|1\rangle & \langle \sin t|\cos t\rangle & \langle \sin t|\sin t\rangle & \ldots & \langle \sin t|\sin nt\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \sin nt|1\rangle & \langle \sin nt|\cos t\rangle & \langle \sin nt|\sin t\rangle & \ldots & \langle \sin nt|\sin nt\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} 1\cdot\cos t\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} 1\cdot\sin t\,\mathrm{d}t & \ldots & \int_0^{2\pi} 1\cdot\sin nt\,\mathrm{d}t \\ \int_0^{2\pi} \cos t\cdot 1\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \cos t\cos t\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \cos t\sin t\,\mathrm{d}t & \ldots & \int_0^{2\pi} \cos t\sin nt\,\mathrm{d}t \\ \int_0^{2\pi} \sin t\cdot 1\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \sin t\sin t\,\mathrm{d}t & \ldots & \int_0^{2\pi} \sin t\sin nt\,\mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{2\pi} \sin nt\cdot 1\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \sin nt\cos t\,\mathrm{d}t & \int_0^{2\pi} \sin nt\sin t\,\mathrm{d}t & \ldots & \int_0^{2\pi} \sin nt\sin nt\,\mathrm{d}t \end{vmatrix}$$

Применом решења за тригонометријске интеграле знаних из стандардних курсева математике

$$\int_0^{2\pi} \sin mt\sin nt\,\mathrm{d}t = \pi\,\delta_{mn}\,; \quad \int_0^{2\pi} \cos mt\cos nt\,\mathrm{d}t = \pi\,\delta_{mn}\,; \quad \int_0^{2\pi} \sin mt\cos nt\,\mathrm{d}t = 0\,;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nt\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\delta_{n0}\,; \quad \int_0^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

испоставља се да је Грамова детерминанта заиста различита од нуле

$$G(1,\cos t,\sin t,\ldots,\sin nt)=\begin{vmatrix} 2\pi & 2\pi\delta_{01} & 0 & \ldots & 0 \\ 2\pi\delta_{10} & \pi\delta_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \pi\delta_{11} & \ldots & \pi\delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi\delta_{n0} & 0 & \pi\delta_{n1} & \ldots & \pi\delta_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \pi & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \pi \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Из Грамове детерминанте се види да су задате тригонометријске функције не само линеарно независне, већ и међусобно *ортогоналне*. Треба још само поделити сваку од њих са својом нормом

$$1^{\text{norm}}=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$(\cos t)^{\text{norm}}=\frac{\cos t}{\|\cos t\|}=\frac{\cos t}{\sqrt{\langle \cos t|\cos t\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$$

$$(\sin t)^{\text{norm}}=\frac{\sin t}{\|\sin t\|}=\frac{\sin t}{\sqrt{\langle \sin t|\sin t\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(\sin nt)^{\text{norm}}=\frac{\sin nt}{\|\sin nt\|}=\frac{\sin nt}{\sqrt{\langle \sin nt|\sin nt\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$$

чиме се добија ортонормирани скуп тригонометријских функција

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ldots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\}$$

који је и дат у поставци задатка.

(3.15) Показати да је скуп функција

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{it}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{i2t}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{int} \right\}$$

ортонормиран у простору $\mathbb{C}^n[-\pi,\pi]$ функција непрекидних на сегменту $[-\pi,\pi]$ за скаларни производ дефинисан као

$$\langle v_1(t) | v_2(t) \rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} v_1^*(t)\, v_2(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Полази се од скупа функција непрекидних на сегменту $[-\pi,\pi]$

$$\{1, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{i2t}, \ldots, \mathrm{e}^{int}\}$$

који мора бити *линеарно независан*, што опет значи да Грамова детерминанта датих функција мора бити *различита од нуле*

$$G(1, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{i2t}, \ldots, \mathrm{e}^{int}) = \begin{vmatrix} \langle 1|1\rangle & \langle 1|\mathrm{e}^{it}\rangle & \langle 1|\mathrm{e}^{i2t}\rangle & \ldots & \langle 1|\mathrm{e}^{int}\rangle \\ \langle \mathrm{e}^{it}|1\rangle & \langle \mathrm{e}^{it}|\mathrm{e}^{it}\rangle & \langle \mathrm{e}^{it}|\mathrm{e}^{i2t}\rangle & \ldots & \langle \mathrm{e}^{it}|\mathrm{e}^{int}\rangle \\ \langle \mathrm{e}^{i2t}|1\rangle & \langle \mathrm{e}^{i2t}|\mathrm{e}^{it}\rangle & \langle \mathrm{e}^{i2t}|\mathrm{e}^{i2t}\rangle & \ldots & \langle \mathrm{e}^{i2t}|\mathrm{e}^{int}\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathrm{e}^{int}|1\rangle & \langle \mathrm{e}^{int}|\mathrm{e}^{it}\rangle & \langle \mathrm{e}^{int}|\mathrm{e}^{i2t}\rangle & \ldots & \langle \mathrm{e}^{int}|\mathrm{e}^{int}\rangle \end{vmatrix}.$$

На основу задатог скаларног производа, елементи Грамове детеминанте постају

$$G(1, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{i2t}, \ldots, \mathrm{e}^{int}) = \begin{vmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} 1^* 1\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} 1^* \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} 1^* \mathrm{e}^{i2t}\, \mathrm{d}t & \ldots & \int_{-\pi}^{\pi} 1^* \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it})^* 1\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it})^* \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it})^* \mathrm{e}^{i2t}\, \mathrm{d}t & \ldots & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it})^* \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{i2t})^* 1\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{i2t})^* \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{i2t})^* \mathrm{e}^{i2t}\, \mathrm{d}t & \ldots & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{i2t})^* \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{int})^* 1\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{int})^* \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{int})^* \mathrm{e}^{i2t}\, \mathrm{d}t & \ldots & \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{int})^* \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{d}t \end{vmatrix}$$

односно, након комплексног коњуговања експоненцијалних функција

$$G(1,\mathrm{e}^{it},\mathrm{e}^{i2t},\ldots,\mathrm{e}^{int})=\begin{vmatrix} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{(0-0)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(1-0)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(2-0)t}\,\mathrm{d}t & \ldots & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-0)t}\,\mathrm{d}t \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{(0-1)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(1-1)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(2-1)t}\,\mathrm{d}t & \ldots & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-1)t}\,\mathrm{d}t \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(0-2)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(1-2)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(2-2)t}\,\mathrm{d}t & \ldots & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-2)t}\,\mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(0-n)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(1-n)t}\,\mathrm{d}t & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(2-n)t}\,\mathrm{d}t & \ldots & \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-n)t}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix}.$$

Уместо да се рачуна сваки од интеграла појединачно, биће израчунат интеграл експоненцијалне функције општег експонента

$$\mathcal{J}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t$$

прво за случај када је $n=m$

$$\mathcal{J}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(m-m)t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i\,0\,t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=\left(t\,\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\pi-(-\pi)=2\pi\,,$$

а потом када је $n\neq m$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{i(n-m)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}[i(n-m)t]=\frac{1}{i(n-m)}\left(\mathrm{e}^{i(n-m)t}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\\ &=\frac{1}{i(n-m)}\Big[\cos(n-m)t+i\sin(n-m)t\,\Big|_{-\pi}^{\pi}\Big]\\ &=\frac{1}{i(n-m)}\big\{\cos(n-m)\pi+i\sin(n-m)\pi-\cos\big[-(n-m)\pi\big]-i\sin\big[-(n-m)\pi\big]\big\}\\ &=\frac{1}{i(n-m)}\big\{\cos(n-m)\pi+i\sin(n-m)\pi-\cos(n-m)\pi+i\sin(n-m)\pi\big\}\\ &=\frac{1}{i(n-m)}2i\sin(n-m)\pi\end{aligned}$$

Како је синус целобројног π увек једнак нули, то је и горњи интеграл једнак нули.

Обједињено написано, тражени интеграл има облик

$$\mathcal{J}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

те је очигледно да су сви интеграли који се налазе на главној дијагонали Грамове детерминанте једнаки 2π, док су сви који се налазе ван ње једнаки нули

$$G(1, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{i2t}, \dots, \mathrm{e}^{int}) = \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\pi \end{vmatrix} = 2\pi \cdot 2\pi \cdot \ldots \cdot 2\pi \neq 0 \ .$$

Из вредности на крају добијене Грамове детерминанте јасно је да су задате функције *линеарно независне*, а из њених елемената да су такође и *међусобно ортогоналне*. Преостаје само да се оне *нормирају*, односно да се свака од њих подели са својом нормом

$$1^{\text{norm}} = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$(\mathrm{e}^{it})^{\text{norm}} = \frac{\mathrm{e}^{it}}{\|\mathrm{e}^{it}\|} = \frac{\mathrm{e}^{it}}{\sqrt{\langle \mathrm{e}^{it}|\mathrm{e}^{it}\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{it}$$

$$(\mathrm{e}^{i2t})^{\text{norm}} = \frac{\mathrm{e}^{i2t}}{\|\mathrm{e}^{i2t}\|} = \frac{\mathrm{e}^{i2t}}{\sqrt{\langle \mathrm{e}^{i2t}|\mathrm{e}^{i2t}\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{i2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(\mathrm{e}^{int})^{\text{norm}} = \frac{\mathrm{e}^{int}}{\|\mathrm{e}^{int}\|} = \frac{\mathrm{e}^{int}}{\sqrt{\langle \mathrm{e}^{int}|\mathrm{e}^{int}\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}$$

чиме је добијен ортонормирани скуп експоненцијалних функција

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{it}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{i2t}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int} \right\}$$

који је и дат у поставци задатка.

(3.16) Грам-Шмитовим поступком *ортонормирати* следеће векторе

(а) $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$;

(б) $(2,3,-4,-6),(1,8,-2,-16),(12,5,-14,5)\in\mathbb{R}^4$.

(а) Ортонормирање вектора $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ Грам-Шмитовим поступком почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом)

$$|e_1\rangle=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{\langle(1,1,1)|(1,1,1)\rangle}}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^*\cdot 1+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|e_2\rangle=\frac{|v_2\rangle-\langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle}{\||v_2\rangle-\langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle\|}=\frac{(0,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\middle|(0,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}{\left\|(0,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\middle|(0,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,1)-\frac{1}{3}\left(0^*\cdot 0+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right)(1,1,1)}{\left\|(0,1,1)-\frac{1}{3}\left(0^*\cdot 0+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right)(1,1,1)\right\|}=\frac{(0,1,1)-\frac{2}{3}(1,1,1)}{\left\|(0,1,1)-\frac{2}{3}(1,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{\left(0-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3}\right)}{\left\|\left(0-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^*\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^*\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^*\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}=\frac{\cancel{3}}{\sqrt{6}}\frac{1}{\cancel{3}}(-2,1,1)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

На крају се *ортонормира трећи вектор*

$$|e_3\rangle=\frac{|v_3\rangle-\langle e_1|v_3\rangle|e_1\rangle-\langle e_2|v_3\rangle|e_2\rangle}{\||v_3\rangle-\langle e_1|v_3\rangle|e_1\rangle-\langle e_2|v_3\rangle|e_2\rangle\|}$$

$$=\frac{(0,0,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)}{\left\|(0,0,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\middle|(0,0,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}\left(1^*\cdot 0+1^*\cdot 0+1^*\cdot 1\right)(1,1,1)-\frac{1}{6}\left((-2)^*\cdot 0+1^*\cdot 0+1^*\cdot 1\right)(-2,1,1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}\left(1^*\cdot 0+1^*\cdot 0+1^*\cdot 1\right)(1,1,1)-\frac{1}{6}\left((-2)^*\cdot 0+1^*\cdot 0+1^*\cdot 1\right)(-2,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,0,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{6}(-2,1,1)}{\left\|(0,0,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{6}(-2,1,1)\right\|}=\frac{\left(0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6},0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac{-2+2}{6},-\frac{2+1}{6},\frac{6-2-1}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{-2+2}{6},-\frac{2+1}{6},\frac{6-2-3}{6}\right)\right\|}=\frac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0^{*}\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{*}\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{*}\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{2}}(0,-1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

Овде треба обратити пажњу на то да су код другог и трећег вектора *промењене поједине компоненте* након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\quad\rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\ .$$

НАПОМЕНА: резултујући ортонормирани вектори који се добијају Грам-Шмитовим поступком јако зависе од тога који се од вектора одабере да буде нормиран први. Нпр. да је прво одбран трећи вектор (као најпростији од три задата) за нормирање Грам-Шмитовим поступком, биће

$$|e_3\rangle=\frac{|v_3\rangle}{\left\||v_3\rangle\right\|}=\frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}}=\frac{(0,0,1)}{\sqrt{\langle(0,0,1)|(0,0,1)\rangle}}=\frac{(0,0,1)}{\sqrt{0^{*}\cdot 0+0^{*}\cdot 0+1^{*}\cdot 1}}=(0,0,1)$$

(очигледно је трећи вектор и био нормиран), потом се ортонормира други (будући простији од првог)

$$|e_2\rangle=\frac{|v_2\rangle-\langle e_3|v_2\rangle|e_3\rangle}{\left\||v_2\rangle-\langle e_3|v_2\rangle|e_3\rangle\right\|}=\frac{(0,1,1)-\langle(0,0,1)|(0,1,1)\rangle(0,0,1)}{\left\|(0,1,1)-\langle(0,0,1)|(0,1,1)\rangle(0,0,1)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,1)-\left(0^{*}\cdot 0+0^{*}\cdot 1+1^{*}\cdot 1\right)(0,0,1)}{\left\|(0,1,1)-\left(0^{*}\cdot 0+0^{*}\cdot 1+1^{*}\cdot 1\right)(0,0,1)\right\|}=\frac{(0,1,1)-(0,0,1)}{\left\|(0,1,1)-(0,0,1)\right\|}=\frac{(0,1,0)}{\left\|(0,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^{*}\cdot 0+1^{*}\cdot 1+0^{*}\cdot 0}}=(0,1,0)$$

те, на самом крају, наравно први вектор (као најсложенији од свих)

$$|e_1\rangle=\frac{|v_1\rangle-\langle e_3|v_1\rangle|e_3\rangle-\langle e_2|v_1\rangle|e_2\rangle}{\left\||v_1\rangle-\langle e_3|v_1\rangle|e_3\rangle-\langle e_2|v_1\rangle|e_2\rangle\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,1)-\langle(0,0,1)|(1,1,1)\rangle(0,0,1)-\langle(0,1,0)|(1,1,1)\rangle(0,1,0)}{\left\|(1,1,1)-\langle(0,0,1)|(1,1,1)\rangle(0,0,1)-\langle(0,1,0)|(1,1,1)\rangle(0,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,1)-\left(0^*\cdot 1+0^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right)(0,0,1)-\left(0^*\cdot 1+1^*\cdot 1+0^*\cdot 1\right)(0,1,0)}{\left\|(1,1,1)-\left(0^*\cdot 1+0^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right)(0,0,1)-\left(0^*\cdot 1+1^*\cdot 1+0^*\cdot 1\right)(0,1,0)\right\|}$$

$$=\frac{(1,1,1)-(0,0,1)-(0,1,0)}{\|(1,1,1)-(0,0,1)-(0,1,0)\|}=\frac{(1-0-0,1-0-1,1-1-0)}{\|(1-0-0,1-0-1,1-1-0)\|}=\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}$$

$$==\frac{(1,0,0)}{\sqrt{1^*\cdot 1+0^*\cdot 0+0^*\cdot 0}}=(1,0,0)$$

Јасно је да су сва три задата вектора сада постали *вектори апсолутног базиса*, као последица тога што је Грам-Шмитов поступак ортонормирања отпочео трећим вектором, а он је отпочетка и био из апсолутног базиса

$$(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\ \to\ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\,.$$

* * *

(б) Ортонормирање вектора $(2,3,-4,-6),(1,8,-2,-16),(12,5,-14,5)\in\mathbb{R}^4$ Грам-Шмитовим поступком почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом), будући да је он по својим компонентама најпростији

$$|\mathrm{e}_1\rangle=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(2,3,-4,-6)}{\sqrt{\langle(2,3,-4,-6)|(2,3,-4,-6)\rangle}}=\frac{(2,3,-4,-6)}{\sqrt{4+9+16+36}}=\frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6)\,.$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|\mathrm{e}_2\rangle=\frac{|v_2\rangle-\langle\mathrm{e}_1|v_2\rangle|\mathrm{e}_1\rangle}{\||v_2\rangle-\langle\mathrm{e}_1|v_2\rangle|\mathrm{e}_1\rangle\|}$$

$$=\frac{(1,8,-2,-16)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6)\middle|(1,8,-2,-16)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6)}{\left\|(1,8,-2,-16)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6)\middle|(1,8,-2,-16)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6)\right\|}$$

$$=\frac{(1,8,-2,-16)-\frac{1}{65}\left(2+24+8+96\right)(2,3,-4,-6)}{\left\|(1,8,-2,-16)-\frac{1}{65}\left(2+24+8+96\right)(2,3,-4,-6)\right\|}$$

$$=\frac{(1,8,-2,-16)-\frac{130}{65}(2,3,-4,-6)}{\left\|(1,8,-2,-16)-\frac{130}{65}(2,3,-4,-6)\right\|}=\frac{(1,8,-2,-16)-2\cdot(2,3,-4,-6)}{\|(1,8,-2,-16)-2\cdot(2,3,-4,-6)\|}$$

$$=\frac{(1-4,8-6,-2+8,-16+12)}{\|(1-4,8-6,-2+8,-16+12)\|}=\frac{(-3,2,6,-4)}{\|(-3,2,6,-4)\|}=\frac{(-3,2,6,-4)}{\sqrt{9+4+36+16}}=\frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4)$$

На крају се *ортонормира трећи вектор*

$$|\mathrm{e}_3\rangle = \frac{|v_3\rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_3\rangle |\mathrm{e}_1\rangle - \langle \mathrm{e}_2 | v_3\rangle |\mathrm{e}_2\rangle}{\left\| |v_3\rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_3\rangle |\mathrm{e}_1\rangle - \langle \mathrm{e}_2 | v_3\rangle |\mathrm{e}_2\rangle \right\|}$$

$$= \frac{(12,5,-14,5) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6) \middle| (12,5,-14,5) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4) \middle| (12,5,-14,5) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4)}{\left\| (12,5,-14,5) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6) \middle| (12,5,-14,5) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4) \middle| (12,5,-14,5) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4) \right\|}$$

$$= \frac{(12,5,-14,5) - \frac{1}{65}(24+15+56-30)(2,3,-4,-6) - \frac{1}{65}(-36+10-84-20)(-3,2,6,-4)}{\left\| (12,5,-14,5) - \frac{1}{65}(24+15+56-30)(2,3,-4,-6) - \frac{1}{65}(-36+10-84-20)(-3,2,6,-4) \right\|}$$

$$= \frac{(12,5,-14,5) - \frac{65}{65}(2,3,-4,-6) + \frac{130}{65}(-3,2,6,-4)}{\left\| (12,5,-14,5) - \frac{65}{65}(2,3,-4,-6) + \frac{130}{65}(-3,2,6,-4) \right\|}$$

$$= \frac{(12,5,-14,5) - (2,3,-4,-6) + 2(-3,2,6,-4)}{\| (12,5,-14,5) - (2,3,-4,-6) + 2(-3,2,6,-4) \|}$$

$$= \frac{(12-2-6, 5-3+4, -14+4+12, 5+6-8)}{\| (12-2-6, 5-3+4, -14+4+12, 5+6-8) \|} = \frac{(4,6,2,3)}{\| (4,6,2,3) \|}$$

$$= \frac{(4,6,2,3)}{\sqrt{16+36+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{65}}(4,6,2,3)$$

У овом случају су буквално *све компоненте* другог и трећег вектора промењене након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$(2,3,-4,-6), (1,8,-2,-16), (12,5,-14,5) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{65}}(2,3,-4,-6), \frac{1}{\sqrt{65}}(-3,2,6,-4), \frac{1}{\sqrt{65}}(4,6,2,3) .$$

(3.17) Грам-Шмитовим поступком *ортонормирати* следеће векторе

(а) $(0,1,-1),(1+i,1,1),(1-i,1,1)\in\mathbb{C}^3$;

(б) $(2i,-2i,0),(3i,-i,0),(-3,-1,i)\in\mathbb{C}^3$.

(а) Ортонормирање вектора $(0,1,-1),(1+i,1,1),(1-i,1,1)\in\mathbb{C}^3$ Грам-Шмитовим поступком почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом), будући да су његове компоненте најпростије

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{\langle(0,1,-1)|(0,1,-1)\rangle}}=\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{0^*\cdot 0+1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot(-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}\right\|}=\frac{(1+i,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\middle|(1+i,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)}{\left\|(1+i,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\middle|(1+i,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\|}$$

$$=\frac{(1+i,1,1)-\frac{1}{2}\left[0^*\cdot(1+i)+1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1\right](0,1,-1)}{\left\|(1+i,1,1)-\frac{1}{2}\left[0^*\cdot(1+i)+1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1\right](0,1,-1)\right\|}=\frac{(1+i,1,1)-0\cdot(0,1,-1)}{\|(1+i,1,1)-0\cdot(0,1,-1)\|}$$

$$=\frac{(1+i,1,1)}{\|(1+i,1,1)\|}=\frac{(1+i,1,1)}{\sqrt{(1+i)^*(1+i)+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1}}=\frac{(1+i,1,1)}{\sqrt{(1-i)(1+i)+2}}=\frac{(1+i,1,1)}{\sqrt{1^2-i^2+2}}=\frac{1}{2}(1+i,1,1)$$

На крају се *ортонормира трећи вектор*

$$|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$=\frac{(1-i,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\middle|(1-i,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)-\left\langle\frac{1}{2}(1+i,1,1)\middle|(1-i,1,1)\right\rangle\frac{1}{2}(1+i,1,1)}{\left\|(1-i,1,1)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\middle|(1-i,1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)-\left\langle\frac{1}{2}(1+i,1,1)\middle|(1-i,1,1)\right\rangle\frac{1}{2}(1+i,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(1-i,1,1)-\frac{1}{2}\left[0^*\cdot(1-i)+1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1\right](0,1,-1)-\frac{1}{4}\left[(1+i)^*(1-i)+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right](1+i,1,1)}{\left\|(1-i,1,1)-\frac{1}{2}\left[0^*\cdot(1-i)+1^*\cdot 1+(-1)^*\cdot 1\right](0,1,-1)-\frac{1}{4}\left[(1+i)^*(1-i)+1^*\cdot 1+1^*\cdot 1\right](1+i,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(1-i,1,1)-\frac{1}{2}0\cdot(0,1,-1)-\frac{1}{4}\left[(1-i)(1-i)+2\right](1+i,1,1)}{\left\|(1-i,1,1)-\frac{1}{2}0\cdot(0,1,-1)-\frac{1}{4}\left[(1-i)(1-i)+2\right](1+i,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{(1-i,1,1)-\frac{1}{4}(1-2i+i^2+2)(1+i,1,1)}{\left\|(1-i,1,1)-\frac{1}{4}(1-2i+i^2+2)(1+i,1,1)\right\|}=\frac{(1-i,1,1)-\frac{1-i}{2}(1+i,1,1)}{\left\|(1-i,1,1)-\frac{1-i}{2}(1+i,1,1)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac{2-2i}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{(1-i)(1+i)}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{2-2i}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{(1-i)(1+i)}{2},\frac{1-i}{2},\frac{1-i}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{2-2i-1^2+i^2}{2},\frac{2-1+i}{2},\frac{2-1+i}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{2-2i-1^2+i^2}{2},\frac{2-1+i}{2},\frac{2-1+i}{2}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)}{\left\|\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)}{\sqrt{(-i)^*(-i)+\left(\frac{1+i}{2}\right)^*\left(\frac{1+i}{2}\right)+\left(\frac{1+i}{2}\right)^*\left(\frac{1+i}{2}\right)}}$$

$$=\frac{\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)}{\sqrt{i\cdot(-i)+2\frac{(1-i)(1+i)}{4}}}=\frac{\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1^2-i^2}{2}}}=\frac{\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2+1+1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right)$$

Обратити пажњу на то да су код трећег вектора *промењене све компоненте* након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$(0,1,-1),(1+i,1,1),(1-i,1,1)\ \to\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1),\frac{1}{2}(1+i,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i,\frac{1+i}{2},\frac{1+i}{2}\right).$$

* * *

(б) Ортонормирање вектора $(2i,-2i,0),(3i,-i,0),(-3,-1,i)\in\mathbb{C}^3$ Грам-Шмитовим поступком почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом), будући да је он по својим компонентама најпростији

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{(2i,-2i,0)}{\sqrt{\langle(2i,-2i,0)|(2i,-2i,0)\rangle}}=\frac{(2i,-2i,0)}{\sqrt{(2i)^*(2i)+(-2i)^*(-2i)+0^*\cdot 0}}$$

$$=\frac{(2i,-2i,0)}{\sqrt{(-2i)(2i)+(2i)(-2i)}}=\frac{(2i,-2i,0)}{\sqrt{-4i^2-4i^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}(2i,-2i,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}\right\|}=\frac{(3i,-i,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)\middle|(3i,-i,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)}{\left\|(3i,-i,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)\middle|(3i,-i,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(3i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[i^*\cdot 3i+(-i)^*(-i)+0^*\cdot 0\right](i,-i,0)}{\left\|(3i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[i^*\cdot 3i+(-i)^*(-i)+0^*\cdot 0\right](i,-i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(3i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[(-i)3i+i(-i)\right](i,-i,0)}{\left\|(3i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[(-i)3i+i(-i)\right](i,-i,0)\right\|}=\frac{(3i,-i,0)-\frac{1}{2}(3+1)(i,-i,0)}{\left\|(3i,-i,0)-\frac{1}{2}(3+1)(i,-i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(3i,-i,0)-2(i,-i,0)}{\|(3i,-i,0)-2(i,-i,0)\|}=\frac{(3i-2i,-i+2i,0)}{\|(3i-2i,-i+2i,0)\|}=\frac{(i,i,0)}{\|(i,i,0)\|}=\frac{(i,i,0)}{\sqrt{i^*i+i^*i++0^*\cdot 0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0)$$

На крају се *ортонормира трећи вектор*

$$|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$=\frac{(-3,-1,i)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)\middle|(-3,-1,i)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0)\middle|(-3,-1,i)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0)}{\left\|(-3,-1,i)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)\middle|(-3,-1,i)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0)\middle|(-3,-1,i)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(-3,-1,i)-\frac{1}{2}\left[i^*(-3)+(-i)^*(-1)+0^*i\right](i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[i^*(-3)+i^*(-1)+0^*i\right](i,i,0)}{\left\|(-3,-1,i)-\frac{1}{2}\left[i^*(-3)+(-i)^*(-1)+0^*i\right](i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[i^*(-3)+i^*(-1)+0^*i\right](i,i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(-3,-1,i)-\frac{1}{2}\left[(-i)(-3)+i(-1)\right](i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[(-i)(-3)+(-i)(-1)\right](i,i,0)}{\left\|(-3,-1,i)-\frac{1}{2}\left[(-i)(-3)+i(-1)\right](i,-i,0)-\frac{1}{2}\left[(-i)(-3)+(-i)(-1)\right](i,i,0)\right\|}$$

$$=\frac{(-3,-1,i)-\frac{1}{2}(3i-i)(i,-i,0)-\frac{1}{2}(3i+i)(i,i,0)}{\left\|(-3,-1,i)-\frac{1}{2}(3i-i)(i,-i,0)-\frac{1}{2}(3i+i)(i,i,0)\right\|}=\frac{(-3,-1,i)-i(i,-i,0)-2i(i,i,0)}{\|(-3,-1,i)-i(i,-i,0)-2i(i,i,0)\|}$$

$$=\frac{(-3,-1,i)-(-1,1,0)-(-2,-2,0)}{\|(-3,-1,i)-(-1,1,0)-(-2,-2,0)\|}=\frac{(-3+1+2,-1-1+2,i-0-0)}{\|(-3+1+2,-1-1+2,i-0-0)\|}$$

$$=\frac{(0,0,i)}{\|(0,0,i)\|}=\frac{(0,0,i)}{\sqrt{\langle(0,0,i)\,|\,(0,0,i)\rangle}}=\frac{(0,0,i)}{\sqrt{0^*\cdot 0+0^*\cdot 0+i^*i}}=(0,0,i)$$

У овом случају су *одређене компоненте* другог и трећег вектора промењене након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$(2i,-2i,0),(3i,-i,0),(-3,-1,i)\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}(i,-i,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(i,i,0),(0,0,i)\ .$$

(3.18) Грам-Шмитовим поступком *ортонормирати* следеће векторе

(а) $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{22}$;

(б) $\begin{bmatrix}1&i\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&i\\0&i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{22}$.

(а) Као и раније, ортонормирање задатих вектора почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом)

$$|v_1\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}=\frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}}=\frac{\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\sqrt{\left\langle\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\rangle}}=\frac{\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right)}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right)}}=\frac{\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}1&1\\1&5\end{bmatrix}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|v_2\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_2\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}3&1\\3&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}3&1\\3&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{6}{6}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}-\frac{6}{6}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}3-1&1-1\\0&1-2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3-1&1-1\\0&1-2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)}=\frac{\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

На крају се *ортонормира трећи вектор*

$$|v_3\rangle^{\text{norm}}=\frac{|v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_3\rangle-{}^{\text{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&2\\4&10\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}4&4\\-1&-4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&2\\4&10\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}4&4\\-1&-4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{12}{6}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{0}{5}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-\frac{12}{6}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}-\frac{0}{5}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&2\\1&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}{\sqrt{\left\langle\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle}}=\frac{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)}}=\frac{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

Обратити пажњу на то да су код другог вектора промењене *три компоненте* док су код трећег вектора промењене *баш све компоненте* након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 4\end{bmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

* * *

(б) Опет, ортонормирање задатих вектора почиње *нормирањем првог вектора* (дељењем првог вектора са његовом нормом)

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\left\langle\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\rangle}} = \frac{\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\-i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right)}} = \frac{\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}1 & i\\-i & 5\end{bmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}$$

Потом следи *ортонормирање другог вектора*

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}}{\left\||v_2\rangle - {}^{\text{norm}}\langle v_1|v_2\rangle|v_1\rangle^{\text{norm}}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\-i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\-i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}3 & i\\-3i & 1+2i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}3 & i\\-3i & 1+2i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{4+2i}{6}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{4+2i}{6}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{2+i}{3}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3 & i\\0 & i\end{bmatrix} - \frac{2+i}{3}\begin{bmatrix}1 & i\\0 & 2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}3-\frac{2+i}{3} & i\left(1-\frac{2+i}{3}\right)\\0 & i-\frac{4+2i}{3}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3-\frac{2+i}{3} & i\left(1-\frac{2+i}{3}\right)\\0 & i-\frac{4+2i}{3}\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}\right)}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{7+i}{3} & 0\\ \frac{1-i}{3} & \frac{-4-i}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}\right)}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{7+i}{3}\frac{7-i}{3} & \frac{7+i}{3}\frac{1+i}{3}\\ \frac{1-i}{3}\frac{7-i}{3} & \frac{1-i}{3}\frac{1+i}{3}+\frac{-4-i}{3}\frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}\right)}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{49-i^2}{9} & \frac{7+7i+i+i^2}{9}\\ \frac{7-i-7i+i^2}{9} & \frac{1-i^2+16-i^2}{9}\end{bmatrix}\right)}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}}{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{50}{9} & \frac{6+8i}{9}\\ \frac{6-8i}{9} & \frac{19}{9}\end{bmatrix}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{69}{9}}}\begin{bmatrix}\frac{7-i}{3} & \frac{1+i}{3}\\ 0 & \frac{-4+i}{3}\end{bmatrix}=\frac{\cancel{3}}{\sqrt{69}}\frac{1}{\cancel{3}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{69}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}$$

На крају се ортонормира трећи вектор

$$|v_3\rangle^{\mathrm{norm}}=\frac{|v_3\rangle-{}^{\mathrm{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{norm}}-{}^{\mathrm{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{norm}}}{\left\||v_3\rangle-{}^{\mathrm{norm}}\langle v_1|v_3\rangle|v_1\rangle^{\mathrm{norm}}-{}^{\mathrm{norm}}\langle v_2|v_3\rangle|v_2\rangle^{\mathrm{norm}}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{69}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{69}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{69}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{69}}\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}7+i & 0\\ 1-i & -4-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}7+i & 0\\ 1-i & -4-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & -6\\ -2i+2i & 6i-2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}14+2i & -42-6i\\ 2-2i-4i-i^2 & -6+6i+4+i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2 & -6\\ i & -1\end{bmatrix}-\frac16\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2 & -6\\ -2i+2i & 6i-2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}14+2i & -42-6i\\ 2-2i-4i-i^2 & -6+6i+4+i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i & 1+i\\ 0 & -4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&-6\\0&6i-2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&i\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}14+2i&-42-6i\\3-6i&-2+7i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i&1+i\\0&-4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}2&-6\\0&6i-2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&i\\0&2\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}14+2i&-42-6i\\3-6i&-2+7i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}7-i&1+i\\0&-4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\frac{\cancel{6}i}{\cancel{6}}\begin{bmatrix}1&i\\0&2\end{bmatrix}-\frac{12+9i}{69}\begin{bmatrix}7-i&1+i\\0&-4+i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\frac{\cancel{6}i}{\cancel{6}}\begin{bmatrix}1&i\\0&2\end{bmatrix}-\frac{12+9i}{69}\begin{bmatrix}7-i&1+i\\0&-4+i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i&-1\\0&2i\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}(12+9i)(7-i)&(12+9i)(1+i)\\0&(12+9i)(-4+i)\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i&-1\\0&2i\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}(12+9i)(7-i)&(12+9i)(1+i)\\0&(12+9i)(-4+i)\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i&-1\\0&2i\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}93+51i&3+21i\\0&-57-24i\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2&-6\\i&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i&-1\\0&2i\end{bmatrix}-\frac{1}{69}\begin{bmatrix}93+51i&3+21i\\0&-57-24i\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2-i-\frac{93+51i}{69}&-6+1-\frac{3+21i}{69}\\i&-1-2i+\frac{57+24i}{69}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2-i-\frac{93+51i}{69}&-6+1-\frac{3+21i}{69}\\i&-1-2i+\frac{57+24i}{69}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{138-69i-93-51i}{69}&\frac{-414+69-3-21i}{69}\\i&\frac{-69-138i+57+24i}{69}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}\frac{138-69i-93-51i}{69}&\frac{-414+69-3-21i}{69}\\i&\frac{-69-138i+57+24i}{69}\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}}{\sqrt{\left\langle\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}\right\rangle}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}\frac{45-120i}{69}&\frac{-348-21i}{69}\\i&\frac{-12-114i}{69}\end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{45+120i}{69} & -i \\ \frac{-348+21i}{69} & \frac{-12+114i}{69} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{45+120i}{69}\frac{45-120i}{69} - i^2 & \frac{45+120i}{69}\frac{-348-21i}{69} - i\frac{-12-114i}{69} \\ \frac{-348+21i}{69}\frac{45-120i}{69} + i\frac{-12+114i}{69} & \frac{-348+21i}{69}\frac{-348-21i}{69} + \frac{-12+114i}{69}\frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{45^2+120^2+69^2}{69^2} & \frac{(45+120i)(-348-21i)+69i(12+114i)}{69^2} \\ \frac{(-348+21i)(45-120i)+69i(-12+114i)}{69^2} & \frac{348^2+21^2+12^2+114^2}{69^2} \end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{21186}{69^2} & \frac{-21006-41877i}{69^2} \\ \frac{-21006-41643i}{69^2} & \frac{134685}{69^2} \end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{45-120i}{69} & \frac{-348-21i}{69} \\ i & \frac{-12-114i}{69} \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{21186}{69^2}+\frac{134685}{69^2}}} = \frac{\cancel{69}}{\sqrt{155871}}\frac{1}{\cancel{69}}\begin{bmatrix} 45-120i & -348-21i \\ i & -12-114i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{155871}}\begin{bmatrix} 45-120i & -348-21i \\ i & -12-114i \end{bmatrix}$$

У овом случају промењене су *три компоненте* и другог и трећег вектора (матрице) након окончања Грам-Шмитовог поступка

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & i \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ i & -1 \end{bmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{bmatrix} 7-i & 1+i \\ 0 & -4+i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{155871}} \begin{bmatrix} 45-120i & -348-21i \\ i & -12-114i \end{bmatrix}.$$

(3.19) Показати да су у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$ следећим изразима задати управо *скаларни производи*

(а) $\langle v_1|v_2\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i$, где су $|v_1\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i |t^i\rangle$ и $|v_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i |t^i\rangle$;

(б) $\langle v_1|v_2\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \int_{-1}^{1} v_1 v_2 \,\mathrm{d}t$;

(в) $\langle v_1|v_2\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \int_{0}^{1} v_1 v_2 \,\mathrm{d}t$.

У односу на овако дефинисане скаларне производе *ортонормирати* базис

$$\{|\,1\,\rangle, |\,t\,\rangle, |\,t^2\rangle\}$$

из простора реалних полинома $\mathbb{P}^3$.

(а) Прво се проверава да ли задати израз задовољава *четири аксиоме* скаларног производа.

i) Ермитска симетрија своди се на *обичну симетрију* у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\langle v_1|v_2\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \xi_i \overset{\mathrm{d}}{=} \langle v_2|v_1\rangle .$$

Ово је последица *комутативности* бројева ξ_i и η_i из поља реалних бројева $\mathbb{R}$.

ii) Важи и *дистрибутивност* задатог израза у односу на сабирање по првом фактору

$$\langle v_1+v_2|v_3\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i+\eta_i)\mu_i = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i \mu_i + \eta_i \mu_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mu_i + \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \mu_i \overset{\mathrm{d}}{=} \langle v_1|v_3\rangle + \langle v_2|v_3\rangle .$$

Ово је последица *дистрибутивности* сабирања бројева ξ_i и η_i у односу на њихово множење са бројем μ_i из поља реалних бројева $\mathbb{R}$.

iii) Антихомогеност по првом фактору своди се на *хомогеност* по првом фактору у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\langle \alpha v_1|v_2\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha\, \xi_i)\eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(\xi_i \eta_i) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha \langle v_1|v_2\rangle .$$

Узрок овоме је *асоцијативност* множења три броја α, ξ_i и η_i из поља реалних бројева $\mathbb{R}$.

iv) Задати израз је такође и *строго позитиван*

$$\langle v|v\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \xi_i = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 \geq 0 .$$

Он ће бити једнак нули само ако је реч о нултом полиному чије су све компоненте ξ_i једнаке нули.

Како задати израз задовољава све четири аксиоме скаларног производа, он се може користити у *Грам-Шмитовом поступку ортонормирања* задатог базиса.

Поступак почиње нормирањем првог полинома, односно дељењем првог вектора његовом нормом

$$\left|1\right\rangle^{\text{norm}}=\frac{\left|1\right\rangle}{\left\|\left|1\right\rangle\right\|}=\frac{\left|1\right\rangle}{\sqrt{\left\langle 1\,\middle|\,1\right\rangle}}=\frac{1+0t+0t^2+\ldots+0t^n}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+\ldots+0^2}}=1+0t+0t^2+\ldots+0t^n=1\ .$$

Потом се ортонормира други задати полином

$$\begin{aligned}\left|t\right\rangle^{\text{norm}}&=\frac{\left|t\right\rangle-{}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\,\middle|\,t\right\rangle\left|1\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|t\right\rangle-{}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\,\middle|\,t\right\rangle\left|1\right\rangle^{\text{norm}}\right\|}\\
&=\frac{(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-\left\langle 1+0t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)}{\left\|(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-\left\langle 1+0t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\right\|}\\
&=\frac{(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-(1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+\ldots+0\cdot 0)(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)}{\left\|(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-(1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+\ldots+0\cdot 0)(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\right\|}\\
&=\frac{(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)}{\left\|(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\right\|}\\
&=\frac{0+1t+0t^2+\ldots+0t^n}{\left\|0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\right\|}=\frac{0+1t+0t^2+\ldots+0t^n}{\sqrt{\left\langle 0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\right\rangle}}\\
&=\frac{0+1t+0t^2+\ldots+0t^n}{\sqrt{0^2+1^2+0^2+\ldots+0^2}}=0+1t+0t^2+\ldots+0t^n=t\end{aligned}$$

На крају се ортонормира трећи задати полином

$$\begin{aligned}\left|t^2\right\rangle^{\text{norm}}&=\frac{\left|t^2\right\rangle-{}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|1\right\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\!\left\langle t\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|t\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|t^2\right\rangle-{}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|1\right\rangle^{\text{norm}}-{}^{\text{norm}}\!\left\langle t\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|t\right\rangle^{\text{norm}}\right\|}\\
&=\frac{\begin{array}{r}(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-\left\langle 1+0t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+0t+1t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\\-\left\langle 0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+0t+1t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)\end{array}}{\left\|\begin{array}{r}(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-\left\langle 1+0t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+0t+1t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\\-\left\langle 0+1t+0t^2+\ldots+0t^n\,\middle|\,0+0t+1t^2+\ldots+0t^n\right\rangle(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)\end{array}\right\|}\\
&=\frac{\begin{array}{r}(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-(1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+\ldots+0\cdot 0)(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\\-(0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+\ldots+0\cdot 0)(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)\end{array}}{\left\|\begin{array}{r}(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-(1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+\ldots+0\cdot 0)(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)\\-(0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+\ldots+0\cdot 0)(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)\end{array}\right\|}\\
&=\frac{(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)}{\left\|(0+0t+1t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(1+0t+0t^2+\ldots+0t^n)-0\cdot(0+1t+0t^2+\ldots+0t^n)\right\|}\end{aligned}$$

то јест

$$\left|t^2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n}{\left\|0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n\right\|} = \frac{0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n}{\sqrt{\left\langle 0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n \middle| 0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n \right\rangle}}$$

$$= \frac{0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n}{\sqrt{0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1+\ldots+0\cdot 0}} = 0+0\,t+1t^2+\ldots+0\,t^n = t^2$$

Пошто су сви задати вектори (полиноми) *ортонормирани* у односу на скаларни производ

$$\left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i \ ,$$

није дошло ни до какве промене задатог базиса

$$\left\{1, t, t^2\right\} \ \rightarrow \ \left\{1, t, t^2\right\}.$$

* * *

(б) Да ли задати израз задовољава *четири аксиоме* скаларног производа?

i) Ермитска симетрија своди се на *обичну симетрију* у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{-1}^{1} v_1 v_2 \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} v_2 v_1 \,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left\langle v_2 \middle| v_1 \right\rangle \ .$$

Разлог је да реалне функције комутирају чак иако се налазе под одређеним интегралом.

ii) Важи и *дистрибутивност* задатог израза у односу на сабирање по првом фактору

$$\left\langle v_1 + v_2 \middle| v_3 \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{-1}^{1} (v_1 + v_2)\, v_3 \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} v_1 v_3 \,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} v_2 v_3 \,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left\langle v_1 \middle| v_3 \right\rangle + \left\langle v_2 \middle| v_3 \right\rangle \ .$$

Ово је последица *дистрибутивности* сабирања две реалне функције у односу на њихово множење трећом реалном функцијом, чак и када су све три под одређеним интегралом.

iii) Антихомогеност по првом фактору своди се на *хомогеност* по првом фактору у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\left\langle \alpha\, v_1 \middle| v_2 \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{-1}^{1} (\alpha\, v_1)\, v_2 \,\mathrm{d}t = \alpha \int_{-1}^{1} v_1 v_2 \,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \alpha \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle \ .$$

Узрок овоме јесте особина да је интеграл скаларом помножене подинтегралне функције једнак скаларом помноженом интегралу подинтегралне функције.

iv) Задати израз је такође и *строго позитиван*

$$\left\langle v \middle| v \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{-1}^{1} v\, v \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} v^2 \,\mathrm{d}t \geq 0 \,.$$

Пошто је под интегралом реч о квадрату подинтегралне функције, онда интеграл мора бити позитиван; интеграл ће бити једнак нули само ако је подинтегрална функција уствари полином чије су све компоненте једнаке нули.

Задати израз испуњава све четири аксиоме скаларног производа, те ће стога дати базис бити ортонормиран *Грам-Шмитовим поступком*.

Први корак јесте нормирање прве функције, тако што се он подели својом нормом

$$\left|\,1\,\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|\,1\,\right\rangle}{\left\|\left|\,1\,\right\rangle\right\|} = \frac{\left|\,1\,\right\rangle}{\sqrt{\left\langle 1\,\middle|\,1\right\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot 1\,\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\left(t\big|_{-1}^{1}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сада се ортонормира друга задата функција

$$\left|\,t\,\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|\,t\,\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle 1\,\middle|\,t\right\rangle \left|\,1\,\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|\,t\,\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle 1\,\middle|\,t\right\rangle \left|\,1\,\right\rangle^{\text{norm}}\right\|} = \frac{t-\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,t\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left\|t-\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,t\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t\right)}{\left\|t-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t\right)\right\|}$$

$$= \frac{t-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t\right)}{\left\|t-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t\right)\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)}{\left\|t-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}\frac{1^2-(-1)^2}{2}}{\left\|t-\frac{1}{2}\frac{1^2-(-1)^2}{2}\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}\frac{0}{2}}{\left\|t-\frac{1}{2}\frac{0}{2}\right\|} = \frac{t}{\|t\|}$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}t\,t\,\mathrm{d}t}} = \frac{t}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t}} = \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{1^3-(-1)^3}{3}}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{1-(-1)}{3}}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

На крају се ортонормира трећи задати полином

$$\left|t^2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|t^2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle 1\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|\,1\,\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\left\langle t\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|\,t\,\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|t^2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\left\langle 1\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|\,1\,\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\left\langle t\,\middle|\,t^2\right\rangle\left|\,t\,\right\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$= \frac{t^2-\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,t^2\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\,t^2\mathrm{d}t\right)\sqrt{\frac{3}{2}}\,t}{\left\|t^2-\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,t^2\mathrm{d}t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\,t^2\mathrm{d}t\right)\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right\|} = \frac{t^2-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t-\frac{3t}{2}\int\limits_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t-\frac{3t}{2}\int\limits_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t\right\|}$$

$$= \frac{t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{3t}{2}\left(\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{3t}{2}\left(\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)\right\|} = \frac{t^2-\frac{1}{2}\frac{1^3-(-1)^3}{3}-\frac{3t}{2}\frac{1^4-(-1)^4}{4}}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\frac{1^3-(-1)^3}{3}-\frac{3t}{2}\frac{1^4-(-1)^4}{4}\right\|}$$

$$= \frac{t^2-\frac{1}{2}\frac{1-(-1)}{3}-\frac{3t}{2}\frac{1-1}{4}}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\frac{1-(-1)}{3}-\frac{3t}{2}\frac{1-1}{4}\right\|} = \frac{t^2-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}-\frac{3t}{2}\frac{0}{4}}{\left\|t^2-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}-\frac{3t}{2}\frac{0}{4}\right\|} = \frac{t^2-\frac{1}{3}}{\left\|t^2-\frac{1}{3}\right\|} = \frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\left(t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}t^4\,\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t+\frac{1}{9}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)+\frac{1}{9}\left(t\big|_{-1}^{1}\right)}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1^5-(-1)^5}{5}-\frac{2}{3}\frac{1^3-(-1)^3}{3}+\frac{1}{9}[1-(-1)]}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1-(-1)}{5}-\frac{2}{3}\frac{1-(-1)}{3}+\frac{1}{9}[1-(-1)]}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\frac{2}{3}+\frac{2}{9}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{18}{45}-\frac{10}{45}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{4\cdot 2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\frac{9}{4}}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)$$

Пошто су сви задати вектори (полиноми) *ортонормирани* у односу на скаларни производ

$$\langle v_1|v_2\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int\limits_{-1}^{1} v_1 v_2\,\mathrm{d}t\,,$$

дошло је до следеће промене задатог базиса

$$\{1,t,t^2\}\ \rightarrow\ \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

* * *

(в) Треба проверити да ли задати израз задовољава *четири аксиоме* скаларног производа.

i) Ермитска симетрија своди се на *обичну симетрију* у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\langle v_1|v_2\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int\limits_{0}^{1} v_1 v_2\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} v_2 v_1\,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \langle v_2|v_1\rangle\ .$$

Разлог је да реалне функције комутирају чак иако се налазе под одређеним интегралом.

ii) Важи и *дистрибутивност* задатог израза у односу на сабирање по првом фактору

$$\langle v_1+v_2|v_3\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int\limits_{0}^{1}(v_1+v_2)v_3\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} v_1 v_3\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} v_2 v_3\,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \langle v_1|v_3\rangle+\langle v_2|v_3\rangle\ .$$

Ово је последица *дистрибутивности* сабирања две реалне функције у односу на њихово множење трећом реалном функцијом, чак и када су све три под одређеним интегралом.

iii) Антихомогеност по првом фактору своди се на *хомогеност* по првом фактору у простору реалних полинома $\mathbb{P}^3$

$$\langle \alpha v_1|v_2\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int\limits_{0}^{1}(\alpha v_1)v_2\,\mathrm{d}t = \alpha\int\limits_{0}^{1} v_1 v_2\,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \alpha\langle v_1|v_2\rangle\ .$$

Узрок овоме јесте особина да је интеграл скаларом помножене подинтегралне функције једнак скаларом помноженом интегралу подинтегралне функције.

iv) Задати израз је такође и *строго позитиван*

$$\langle v|v\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_0^1 v\,v\,\mathrm{d}t = \int_0^1 v^2\,\mathrm{d}t \geq 0\,.$$

Пошто је под интегралом реч о квадрату подинтегралне функције, онда интеграл мора бити позитиван; интеграл ће бити једнак нули само ако је подинтегрална функција уствари полином чије су све компоненте једнаке нули.

Задати израз испуњава све четири аксиоме скаларног производа, те ће стога дати базис бити ортонормиран *Грам-Шмитовим поступком*.

Први корак јесте нормирање прве функције, тако што се он подели својом нормом

$$|\,1\,\rangle^{\mathrm{norm}} = \frac{|\,1\,\rangle}{\|\,|\,1\,\rangle\|} = \frac{|\,1\,\rangle}{\sqrt{\langle\,1\,|\,1\,\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\,\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{\left(t\big|_0^1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1\,.$$

Сада се ортонормира друга задата функција

$$|\,t\,\rangle^{\mathrm{norm}} = \frac{|\,t\,\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\langle\,1\,|\,t\,\rangle|\,1\,\rangle^{\mathrm{norm}}}{\left\|\,|\,t\,\rangle - {}^{\mathrm{norm}}\langle\,1\,|\,t\,\rangle|\,1\,\rangle^{\mathrm{norm}}\right\|} = \frac{t-\left(\int_0^1 1\,t\,\mathrm{d}t\right)1}{\left\|t-\left(\int_0^1 1\,t\,\mathrm{d}t\right)1\right\|} = \frac{t-\left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right)}{\left\|t-\left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right)\right\|}$$

$$= \frac{t-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)}{\left\|t-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)\right\|} = \frac{t-\frac{1^2-0^2}{2}}{\left\|t-\frac{1^2-0^2}{2}\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\left\|t-\frac{1}{2}\right\|} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}t}} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t^2-\cancel{2}t\frac{1}{\cancel{2}}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}t}} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)+\frac{1}{4}\left(t\big|_0^1\right)}}$$

$$= \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1^3-0^3}{3}-\frac{1^2-0^2}{2}+\frac{1}{4}(1-0)}} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-6+3}{4\cdot 3}}} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4\cdot 3}}}$$

$$= \sqrt{4\cdot 3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4}\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2t-1)$$

На крају се ортонормира трећи задати полином

$$\left|t^2\right\rangle^{\text{norm}} = \frac{\left|t^2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\middle|t^2\right\rangle \left|1\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\!\left\langle t\middle|t^2\right\rangle \left|t\right\rangle^{\text{norm}}}{\left\|\left|t^2\right\rangle - {}^{\text{norm}}\!\left\langle 1\middle|t^2\right\rangle \left|1\right\rangle^{\text{norm}} - {}^{\text{norm}}\!\left\langle t\middle|t^2\right\rangle \left|t\right\rangle^{\text{norm}}\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \left(\int_0^1 1\,t^2\,\mathrm{d}t\right)1 - \left(\int_0^1 \sqrt{3}\,(2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{3}\,(2t-1)}{\left\|t^2 - \left(\int_0^1 1\,t^2\,\mathrm{d}t\right)1 - \left(\int_0^1 \sqrt{3}\,(2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{3}\,(2t-1)\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\int_0^1 (2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t}{\left\|t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\int_0^1 (2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t\right\|} = \frac{t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\int_0^1 (2t^3-t^2)\,\mathrm{d}t}{\left\|t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\int_0^1 (2t^3-t^2)\,\mathrm{d}t\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\left(2\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right)}{\left\|t^2 - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3(2t-1)\left(2\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right)\right\|} = \frac{t^2 - \left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right) - 3(2t-1)\left[2\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right) - \left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)\right]}{\left\|t^2 - \left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right) - 3(2t-1)\left[2\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right) - \left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right)\right]\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)}{\left\|t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}{\left\|t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\frac{1}{6}}{\left\|t^2 - \frac{1}{3} - 3(2t-1)\frac{1}{6}\right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - (2t-1)\frac{1}{2}}{\left\|t^2 - \frac{1}{3} - (2t-1)\frac{1}{2}\right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2}}{\left\|t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2}\right\|} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\left\|t^2 - t + \frac{1}{6}\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + 2t^2\frac{1}{6} - 2t\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{d}t}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t + \frac{4}{3}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{36}\int_0^1 \mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\left(\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1\right) - 2\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right) + \frac{4}{3}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right) - \frac{1}{3}\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right) + \frac{1}{36}\left(\left.t\right|_0^1\right)}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{36}}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 36}{36 - 5 \cdot 18 + 5 \cdot 4 \cdot 4 - 5 \cdot 6 + 5}} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{5 \cdot 36}{36 - 90 + 80 - 30 + 5}} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{\frac{5 \cdot 36}{121 - 120}} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \sqrt{5 \cdot 36} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{5}\, 6 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{5}\,(6t^2 - 6t + 1)$$

Пошто су сви задати вектори (полиноми) *ортонормирани* у односу на скаларни производ

$$\langle v_1 | v_2 \rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \int_0^1 v_1 v_2 \,\mathrm{d}t \,,$$

дошло је до другачије промене задатог базиса него у претходном случају

$$\{1, t, t^2\} \;\to\; \{1, \sqrt{3}\,(2t - 1), \sqrt{5}\,(6t^2 - 6t + 1)\}\,.$$

(3.20) Ако се у неком кораку Грам-Шмитовог поступка ортонормирања добије нулти вектор, онда је полазни скуп вектора био линеарно зависан, док је вектор који је постао нулти био линеарна комбинација осталих вектора скупа.

Нека је дат почетни скуп ненултих вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$.

У првом кораку Грам-Шмитовог поступка се нормира први вектор, тј. подели се са својом нормом

$$|e_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|}.$$

У другом кораку Грам-Шмитовог поступка се формира вектор $|v_2'\rangle = |v_2\rangle - \alpha_1 |e_1\rangle$ који мора бити ортогоналан на први нормирани вектор

$$\langle e_1|v_2'\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle e_1|\big(|v_2\rangle - \alpha_1|e_1\rangle\big) = 0 \Leftrightarrow \langle e_1|v_2\rangle - \alpha_1\langle e_1|e_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \langle e_1|v_2\rangle$$

чиме је добијен други вектор који је сада ортогоналан на први $|v_2'\rangle = |v_2\rangle - \langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle$, и кога сада само треба нормирати, тј. поделити га са његовом нормом

$$|e_2\rangle = \frac{|v_2'\rangle}{\||v_2'\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle - \langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle}{\||v_2\rangle - \langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle\|}.$$

Након што се Грам-Шмитов поступак понови на овакав начин m пута, добија се вектор

$$|v_{m+1}'\rangle = |v_{m+1}\rangle - \alpha_1|e_1\rangle - \alpha_2|e_2\rangle - \ldots - \alpha_m|e_m\rangle.$$

Нека је сада, према услову задатка, управо овај вектор једнак нултом вектору $|v_{m+1}'\rangle = |0\rangle$. Следи да је

$$|0\rangle = |v_{m+1}\rangle - \alpha_1|e_1\rangle - \alpha_2|e_2\rangle - \ldots - \alpha_m|e_m\rangle$$

односно

$$|v_{m+1}\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \alpha_2|e_2\rangle + \ldots + \alpha_m|e_m\rangle,$$

те је вектор од кога је Грам-Шмитовим поступком био добијен нулти вектор заиста *линеарна комбинација* претходних m вектора.

То да су вектори почетног скупа $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ *линеарно зависни* јесте последица управо чињенице да се један од вектора овог скупа, рецимо $|v_{m+1}\rangle$, може представити као линеарна комбинација осталих

$$|v_{m+1}\rangle - \alpha_1|e_1\rangle - \alpha_2|e_2\rangle - \ldots - \alpha_m|e_m\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1|e_1\rangle + \alpha_2|e_2\rangle + \ldots + \alpha_m|e_m\rangle + (-1)|v_{m+1}\rangle = |0\rangle$$

те је коефицијент линеарне комбинације који стоји уз њега сигурно *различит од нуле*.

(3.21) Проверити да ли је наведени скуп вектора *ортогоналан*, потом га *допунити до базиса*, а затим од њега направити *ортонормирани базис*

$$|v_1\rangle = (1,-2,1,3), |v_2\rangle = (2,1,-3,1) \in \mathbb{R}^4 .$$

Прво се проверава *ортогоналност* два задата вектора

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle (1,-2,1,3) | (2,1,-3,1) \rangle = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 3\cdot 1 = 2-2-3+3 = 0 .$$

Јасно је да су задата два вектора *међусобно ортогонални*.

Сада треба дата два вектора допунити до базиса. Нека је дат вектор $|v_3\rangle = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ који мора бити *ортогоналан* на прва два; из услова ортогоналности следе две једначине

$$\begin{cases} \langle v_1 | v_3 \rangle = 0 \\ \langle v_2 | v_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (1,-2,1,3) | (a,b,c,d) \rangle = 0 \\ \langle (2,1,-3,1) | (a,b,c,d) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c+3d=0 \\ 2a+b-3c+d=0 \end{cases}$$

Пошто је реч о систему од две једначине са четири непознате, потребно је умањити број промењљивих. За почетак се прва једначина помножи са -2 и сабере са другом

$$\begin{cases} a-2b+c+3d=0 \ /\cdot(-2) \\ 2a+b-3c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+4b-2c-6d=0 \\ \quad 2a+b-3c+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5b-5c-5d=0 \Leftrightarrow b-c-d=0 \Leftrightarrow b=c+d$$

па се прва једначина помножи са 3 и сабере са другом

$$\begin{cases} a-2b+c+3d=0 \ /\cdot 3 \\ 2a+b-3c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-6b+3c+9d=0 \\ \quad 2a+b-3c+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5a-5b+10d=0 \Leftrightarrow a-b+2d=0 \Leftrightarrow a=b-2d$$

а на крају се друга једначина помножи са -3 и сабере са првом

$$\begin{cases} a-2b+c+3d=0 \\ 2a+b-3c+d=0 \ /\cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad a-2b+c+3d=0 \\ -6a-3b+9c-3d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5a-5b+10c=0 \Leftrightarrow a+b-2c=0 \Leftrightarrow a=-b+2c$$

Из последња два добијена израза следи систем

$$\begin{cases} a=b-2d \\ a=-b+2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+d-2d \\ a=-c-d+2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c-d \\ a=c-d \end{cases} \Rightarrow a=c-d .$$

Сада се добијени изрази за a и b смене у прву, простију једначину полазног система

$$a-2b+c+3d=0 \Rightarrow (c-d)-2(c+d)+c+3d=0 \Leftrightarrow c-d-2c-2d+c+3d=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2+1)c+(-1-2+3)d=0 \Rightarrow 0\cdot c+0\cdot d=0$$

Овиме је добијен трећи вектор у свом општем облику $|v_3\rangle = (c-d, c+d, c, d)$, а како c и d могу бити ма који реални бројеви, нека је $c=0$ и $d=1$. Онда је $a=c-d=-1$ и $b=c+d=1$, чиме се као трећи вектор система конкретно добија вектор $|v_3\rangle = (-1,1,0,1)$.

Да ли је добијени вектор ортогоналан на прва два? Јесте, будући да је

$$\begin{cases} \langle v_1 | v_3 \rangle = \langle (1,-2,1,3) | (-1,1,0,1) \rangle = -1-2+3=0 \\ \langle v_2 | v_3 \rangle = \langle (2,1,-3,1) | (-1,1,0,1) \rangle = -2+1+1=0 \end{cases}$$

Да би скуп од три вектора

$$|v_1\rangle = (1,-2,1,3), |v_2\rangle = (2,1,-3,1), |v_3\rangle = (-1,1,0,1)$$

био базис, вектори морају бити *линеарно независни*

$$\begin{aligned} \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle + \alpha_3 |v_3\rangle = |0\rangle \; &\Leftrightarrow \; \alpha_1(1,-2,1,3) + \alpha_2(2,1,-3,1) + \alpha_3(-1,1,0,1) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \; (\alpha_1, -2\alpha_1, \alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, -3\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, \alpha_3, 0, \alpha_3) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \; (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 3\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем једначина

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_2 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 \\ 9\alpha_2 + \alpha_2 + 5\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 \\ 15\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Како су сви коефицијенти у линеарној комбинацији једнаки нули, вектори $|v_1\rangle = (1,-2,1,3)$, $|v_2\rangle = (2,1,-3,1)$ и $|v_3\rangle = (-1,1,0,1)$ јесу *линеарно независни*.

Сада треба три горња вектора допунити до базиса. Вектор $|v_4\rangle = (e, f, g, h) \in \mathbb{R}^4$ мора бити *ортогоналан* на ова три; из услова ортогоналности следе три једначине

$$\begin{cases} \langle v_1 | v_4 \rangle = 0 \\ \langle v_2 | v_4 \rangle = 0 \\ \langle v_3 | v_4 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (1,-2,1,3) | (e,f,g,h) \rangle = 0 \\ \langle (2,1,-3,1) | (e,f,g,h) \rangle = 0 \\ \langle (-1,1,0,1) | (e,f,g,h) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e - 2f + g + 3h = 0 \\ 2e + f - 3g + h = 0 \\ -e + f + h = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e - 2f + g + 3h = 0 \\ 2e + f - 3g + h = 0 \\ e = f + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f + h - 2f + g + 3h = 0 \\ 2f + 2h + f - 3g + h = 0 \\ e = f + h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f+g+4h=0 \\ 3f-3g+3h=0 \\ e=f+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f+g+4h=0 \\ f-g+h=0 \\ e=f+h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f+g+4h=0 \\ g=f+h \\ e=f+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f+f+h+4h=0 \\ g=f+h \\ e=f+h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5h=0 \\ g=f+h \\ e=f+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ g=f \\ e=f \end{cases}$$

Из добијених израза је јасно да f може да буде било који реалан број, те ће општи облик четвртог вектора бити $|v_4\rangle=(f,f,f,0)$. Најпростија вредност за f која даје ненулти вектор јесте јединица, чиме се добија конкретни облик четвртог вектора, као $|v_4\rangle=(1,1,1,0)$.

Сада треба проверити да ли је четврти вектор *ортогоналан* на прва три. Он то и јесте

$$\begin{cases} \langle v_1|v_4\rangle=\langle(1,-2,1,3)|(1,1,1,0)\rangle=1-2+1=0 \\ \langle v_2|v_4\rangle=\langle(2,1,-3,1)|(1,1,1,0)\rangle=2+1-3=0 \\ \langle v_3|v_4\rangle=\langle(-1,1,0,1)|(1,1,1,0)\rangle=-1+1=0 \end{cases}$$

Да би скуп од четири вектора

$$|v_1\rangle=(1,-2,1,3),|v_2\rangle=(2,1,-3,1),|v_3\rangle=(-1,1,0,1),|v_4\rangle=(1,1,1,0)$$

био базис, вектори морају бити *линеарно независни*

$$\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle+\alpha_3|v_3\rangle+\alpha_4|v_4\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(1,-2,1,3)+\alpha_2(2,1,-3,1)+\alpha_3(-1,1,0,1)+\alpha_4(1,1,1,0)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1,-2\alpha_1,\alpha_1,3\alpha_1)+(2\alpha_2,\alpha_2,-3\alpha_2,\alpha_2)+(-\alpha_3,\alpha_3,0,\alpha_3)+(\alpha_4,\alpha_4,\alpha_4,0)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4,-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_4,3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране биће

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \\ -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1-3\alpha_2+\alpha_4=0 \\ 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \\ -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1=3\alpha_2-\alpha_4 \\ 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \\ -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1=3\alpha_2-\alpha_4 \\ 9\alpha_2-3\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0 \\ -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1=3\alpha_2-\alpha_4 \\ 10\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_2 - \alpha_4 + 2\alpha_2 + 10\alpha_2 - 3\alpha_4 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15\alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = 3\alpha_2 - 5\alpha_2 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 + 15\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 \\ -4\alpha_2 + \alpha_2 + 5\alpha_2 + 5\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 \\ 7\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 5\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Како су сви коефицијенти у линеарној комбинацији једнаки нули, вектори $|v_1\rangle = (1,-2,1,3)$, $|v_2\rangle = (2,1,-3,1)$, $|v_3\rangle = (-1,1,0,1)$ и $|v_4\rangle = (1,1,1,0)$ су *линеарно независни*, а пошто им је број једнак броју димензија простора $\mathbb{R}^4$, то они чине *базис* поменутог простора.

Ова четири вектора нема потребе *ортонормирати* Грам-Шмитовим поступком, будући да су они већ међусобно ортогонални. Довољно их је *нормирати*, односно поделити сваког од њих са његовом нормом

$$|v_1\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_1\rangle}{\||v_1\rangle\|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}} = \frac{(1,-2,1,3)}{\sqrt{\langle (1,-2,1,3)|(1,-2,1,3)\rangle}} = \frac{(1,-2,1,3)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3)$$

$$|v_2\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_2\rangle}{\||v_2\rangle\|} = \frac{|v_2\rangle}{\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}} = \frac{(2,1,-3,1)}{\sqrt{\langle (2,1,-3,1)|(2,1,-3,1)\rangle}} = \frac{(2,1,-3,1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,-3,1)$$

$$|v_3\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_3\rangle}{\||v_3\rangle\|} = \frac{|v_3\rangle}{\sqrt{\langle v_3|v_3\rangle}} = \frac{(-1,1,0,1)}{\sqrt{\langle (-1,1,0,1)|(-1,1,0,1)\rangle}} = \frac{(-1,1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0,1)$$

$$|v_4\rangle^{\text{norm}} = \frac{|v_4\rangle}{\||v_4\rangle\|} = \frac{|v_4\rangle}{\sqrt{\langle v_4|v_4\rangle}} = \frac{(1,1,1,0)}{\sqrt{\langle (1,1,1,0)|(1,1,1,0)\rangle}} = \frac{(1,1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\ .$$

(3.22) Нека је у унитарном простору $\mathbb{U}$ задат базис $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$. Показати да постоји само један *реципрочни базис* $\{|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_n\rangle\}$ са особином $\langle V_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$. Какав је реципрочни базис *ортогоналног* и *ортонормираног* базиса $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$?

Произвољни вектор реципрочног базиса јесте вектор као и сваки други - што значи да је могуће написати га као *линеарну комбинацију* вектора датог базиса $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$

$$|V_i\rangle = \alpha_{i1}|v_1\rangle + \alpha_{i2}|v_2\rangle + \ldots + \alpha_{in}|v_n\rangle .$$

Сада се овај израз *помножи скаларно слева* са векторима датог базиса

$$\begin{cases} \langle v_1|V_i\rangle = \alpha_{i1}\langle v_1|v_1\rangle + \alpha_{i2}\langle v_1|v_2\rangle + \ldots + \alpha_{in}\langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|V_i\rangle = \alpha_{i1}\langle v_2|v_1\rangle + \alpha_{i2}\langle v_2|v_2\rangle + \ldots + \alpha_{in}\langle v_2|v_n\rangle \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle v_n|V_i\rangle = \alpha_{i1}\langle v_n|v_1\rangle + \alpha_{i2}\langle v_n|v_2\rangle + \ldots + \alpha_{in}\langle v_n|v_n\rangle \end{cases}$$

Горњи систем једначина може се записати у матричном облику

$$\begin{bmatrix} \langle v_1|V_i\rangle \\ \langle v_2|V_i\rangle \\ \vdots \\ \langle v_n|V_i\rangle \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \ldots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Да би матрица-колона с леве стране матричне једначине била различита од нуле (траже се нетривијална решења система једначина), онда обе матрице са десне стране морају бити различите од нуле; матрица-колона са α_{ij} матричним елементима то већ и јесте, али таква мора бити и квадратна матрица, односно њена детерминанта

$$\begin{vmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \ldots & \langle v_1|v_n\rangle \\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \ldots & \langle v_2|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \ldots & \langle v_n|v_n\rangle \end{vmatrix} = G(|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle) \neq 0$$

а то опет значи да систем једначина има *тачно једно решење*, односно да је реципрочни базис *једнозначно одређен*.

(3.23) Одредити реципрочне базисе следећих базиса у $\mathbb{C}^3$

(а) $|v_1\rangle = (1,0,0), |v_2\rangle = (0,2,0), |v_3\rangle = (0,0,3)$;

(б) $|v_1\rangle = (1,-2,3), |v_2\rangle = (1,-1,1), |v_3\rangle = (2,-4,7)$;

(в) $|v_1\rangle = (1,0,i), |v_2\rangle = (1,i,0), |v_3\rangle = (0,1,1)$.

(а) Произвољни вектор реципрочног базиса може се записати као *линеарна комбинација* вектора апсолутног базиса $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$

$$|V_i\rangle = \alpha_{i1}|e_1\rangle + \alpha_{i2}|e_2\rangle + \alpha_{i3}|e_3\rangle$$

односно као уређена тројка

$$|V_i\rangle = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}).$$

Особина коју имају реципрочни базиси

$$\langle V_i | v_j \rangle = \delta_{ij}, \ (i, j = 1,2,3)$$

даје три система од три једначине са три непознате. Први систем једначина

$$\langle V_1 | v_j \rangle = \delta_{1j} \ \Rightarrow \underline{\begin{cases} \langle V_1 | v_1 \rangle = \delta_{11} \\ \langle V_1 | v_2 \rangle = \delta_{12} \\ \langle V_1 | v_3 \rangle = \delta_{13} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (1,0,0) \rangle = 1 \\ \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (0,2,0) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (0,0,3) \rangle = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ 2\alpha_{12} = 0 \\ 3\alpha_{13} = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{13} = 0 \end{cases}}$$

даје први вектор реципрочног базиса

$$|V_1\rangle = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) = (1,0,0),$$

из другог система једначина

$$\langle V_2 | v_j \rangle = \delta_{2j} \ \Rightarrow \underline{\begin{cases} \langle V_2 | v_1 \rangle = \delta_{21} \\ \langle V_2 | v_2 \rangle = \delta_{22} \\ \langle V_2 | v_3 \rangle = \delta_{23} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \langle (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) | (1,0,0) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) | (0,2,0) \rangle = 1 \\ \langle (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) | (0,0,3) \rangle = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{21} = 0 \\ 2\alpha_{22} = 1 \\ 3\alpha_{23} = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_{23} = 0 \end{cases}}$$

следи други вектор реципрочног базиса

$$|V_2\rangle = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

док се из трећег система једначина

$$\langle V_3 | v_j \rangle = \delta_{3j} \ \Rightarrow \underline{\begin{cases} \langle V_1 | v_1 \rangle = \delta_{31} \\ \langle V_1 | v_2 \rangle = \delta_{32} \\ \langle V_1 | v_3 \rangle = \delta_{33} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (1,0,0) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (0,2,0) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (0,0,3) \rangle = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ 2\alpha_{32} = 0 \\ 3\alpha_{33} = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{33} = \dfrac{1}{3} \end{cases}}$$

добија трећи вектор реципрочног базиса

$$|V_3\rangle = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right).$$

* * *

(б) Произвољни вектор реципрочног базиса се, као и у претходном случају, може записати као *линеарна комбинација* вектора апсолутног базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$

$$|V_i\rangle = \alpha_{i1}|\mathrm{e}_1\rangle + \alpha_{i2}|\mathrm{e}_2\rangle + \alpha_{i3}|\mathrm{e}_3\rangle$$

односно као уређена тројка

$$|V_i\rangle = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}).$$

Особина коју имају реципрочни базиси

$$\langle V_i | v_j \rangle = \delta_{ij}, \ (i, j = 1, 2, 3)$$

даје три система од три једначине са три непознате.

i) Први систем једначина

$$\langle V_1 | v_j \rangle = \delta_{1j} \ \Rightarrow \ \underline{\begin{cases} \langle V_1 | v_1 \rangle = \delta_{11} \\ \langle V_1 | v_2 \rangle = \delta_{12} \\ \langle V_1 | v_3 \rangle = \delta_{13} \end{cases}} \ \Leftrightarrow \ \underline{\begin{cases} \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (1, -2, 3) \rangle = 1 \\ \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (1, -1, 1) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) | (2, -4, 7) \rangle = 0 \end{cases}} \ \Leftrightarrow \ \underline{\begin{cases} \alpha_{11} - 2\alpha_{12} + 3\alpha_{13} = 1 \\ \alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \\ 2\alpha_{11} - 4\alpha_{12} + 7\alpha_{13} = 0 \end{cases}}$$

може се записати у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

што се решава преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице једнака је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-7+4) + 2(7-2) + 3(-4+2) = -3 + 10 - 6 = 1$$

Потом следи детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 4 = -3$$

па детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&0&7\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&7\end{vmatrix}=-(7-2)=-5$$

и на крају детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&-1&0\\2&-4&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\2&-4\end{vmatrix}=-4+2=-2\ .$$

На основу ових детерминанти добијају се компоненте првог вектора реципрочног базиса

$$\alpha_{11}=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{1}=3\,,\ \alpha_{12}=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{1}=5\,,\ \alpha_{13}=\frac{D_3}{D}=\frac{-2}{1}=-2$$

који онда гласи

$$|V_1\rangle=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})=(3,5,-2)\,.$$

ii) Други систем једначина

$$\langle V_2|v_j\rangle=\delta_{2j}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\langle V_2|v_1\rangle=\delta_{21}\\ \langle V_2|v_2\rangle=\delta_{22}\\ \langle V_2|v_3\rangle=\delta_{23}\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})|(1,-2,3)\rangle=0\\ \langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})|(1,-1,1)\rangle=1\\ \langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})|(2,-4,7)\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\alpha_{21}-2\alpha_{22}+3\alpha_{23}=0\\ \alpha_{21}-\alpha_{22}+\alpha_{23}=1\\ 2\alpha_{21}-4\alpha_{22}+7\alpha_{23}=0\end{cases}$$

у матричном облику гласи

$$\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-1&1\\2&-4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{22}\\ \alpha_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

што се решава преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице иста је као и раније

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&3\\1&-1&1\\2&-4&7\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&1\\-4&7\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&7\end{vmatrix}+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&1\\-4&7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&1\\2&7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&-1\\2&-4\end{vmatrix}=(-7+4)+2(7-2)+3(-4+2)=-3+10-6=1$$

али остале нису; детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-2&3\\1&-1&1\\0&-4&7\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&3\\-4&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&3\\-4&7\end{vmatrix}=-(-14+12)=2$$

детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1$$

а детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4+4) = 0 \ .$$

Компоненте другог вектора реципрочног базиса су онда

$$\alpha_{21} = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{1} = 2\,,\ \alpha_{22} = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = 1\,,\ \alpha_{23} = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{1} = 0$$

који онда гласи

$$|V_2\rangle = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) = (2,1,0)\,.$$

iii) Трећи систем једначина

$$\langle V_3 | v_j \rangle = \delta_{3j} \ \Rightarrow \ \underline{\begin{cases} \langle V_3 | v_1 \rangle = \delta_{31} \\ \langle V_3 | v_2 \rangle = \delta_{32} \\ \langle V_3 | v_3 \rangle = \delta_{33} \end{cases}} \ \Leftrightarrow \ \underline{\begin{cases} \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (1,-2,3) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (1,-1,1) \rangle = 0 \\ \langle (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) | (2,-4,7) \rangle = 1 \end{cases}} \ \Leftrightarrow \ \underline{\begin{cases} \alpha_{31} - 2\alpha_{32} + 3\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{31} - \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0 \\ 2\alpha_{31} - 4\alpha_{32} + 7\alpha_{33} = 1 \end{cases}}$$

записује се у матрично као

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

а решава се преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице је опет иста као и раније

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-7+4) + 2(7-2) + 3(-4+2) = -3 + 10 - 6 = 1$$

али остале нису; детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је сада облика

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&0&1\\2&1&7\end{vmatrix}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=-(1-3)=2$$

а детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна гласи

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\2&-4&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1+2=1\ .$$

Компоненте трећег вектора реципрочног базиса су онда

$$\alpha_{31}=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{1}=1,\ \alpha_{32}=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{1}=2,\ \alpha_{33}=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{1}=1$$

који онда има облик

$$|V_3\rangle=(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})=(1,2,1)\,.$$

* * *

(в) Произвољни вектор реципрочног базиса се, као и у претходном случају, може записати као *линеарна комбинација* вектора апсолутног базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\}$

$$|V_i\rangle=\alpha_{i1}|\mathrm{e}_1\rangle+\alpha_{i2}|\mathrm{e}_2\rangle+\alpha_{i3}|\mathrm{e}_3\rangle$$

односно као уређена тројка

$$|V_i\rangle=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\alpha_{i3})\,.$$

Особина коју имају реципрочни базиси

$$\langle V_i|v_j\rangle=\delta_{ij}\,,\ (i,j=1,2,3)$$

даје три система од три једначине са три непознате.

i) Први систем једначина

$$\langle V_1|v_j\rangle=\delta_{1j}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}\langle V_1|v_1\rangle=\delta_{11}\\\langle V_1|v_2\rangle=\delta_{12}\\\langle V_1|v_3\rangle=\delta_{13}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\langle(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})|(1,0,i)\rangle=1\\\langle(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})|(1,i,0)\rangle=0\\\langle(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})|(0,1,1)\rangle=0\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha_{11}+i\,\alpha_{13}=1\\\alpha_{11}+i\,\alpha_{12}=0\\\alpha_{12}+\alpha_{13}=0\end{cases}}$$

може се записати у матричном облику као

$$\begin{bmatrix}1&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{12}\\\alpha_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

што се решава преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице једнака је

$$D=\begin{vmatrix}1&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=i+i=2i$$

Потом следи детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_1=\begin{vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}=i$$

па детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&i\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

и на крају детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&i&0\\0&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&i\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&i\\0&1\end{vmatrix}=1\ .$$

На основу ових детерминанти добијају се компоненте првог вектора реципрочног базиса као конјуговани комплексни бројеви

$$\alpha_{11}^*=\frac{D_1}{D}=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2},\ \alpha_{12}^*=\frac{D_2}{D}=\frac{-1}{2i}=\frac{i^2}{2i}=\frac{i}{2},\ \alpha_{13}^*=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2i}=\frac{(-1)i^2}{2i}=-\frac{i}{2}$$

који онда гласи

$$\left|V_1\right\rangle=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})=\frac{1}{2}(1,-i,i)\,.$$

ii) Други систем једначина

$$\left\langle V_2\middle|v_j\right\rangle=\delta_{2j}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}\left\langle V_2\middle|v_1\right\rangle=\delta_{21}\\\left\langle V_2\middle|v_2\right\rangle=\delta_{22}\\\left\langle V_2\middle|v_3\right\rangle=\delta_{23}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\left\langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})\middle|(1,0,i)\right\rangle=0\\\left\langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})\middle|(1,i,0)\right\rangle=1\\\left\langle(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})\middle|(0,1,1)\right\rangle=0\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha_{21}+i\,\alpha_{23}=0\\\alpha_{21}+i\,\alpha_{22}=1\\\alpha_{22}+\alpha_{23}=0\end{cases}}$$

у матричном облику гласи

$$\begin{bmatrix}1&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{21}\\\alpha_{22}\\\alpha_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

што се решава преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице иста је као и раније

$$D=\begin{vmatrix}1&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i&0\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=i+i=2i$$

али остале нису; детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&i\\1&1\end{vmatrix}=i$$

детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&i\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$$

а детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&i&1\\0&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}i&1\\1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\ .$$

Компоненте другог вектора реципрочног базиса су опет конјуговани комплексни бројеви

$$\alpha_{21}^*=\frac{D_1}{D}=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2},\ \alpha_{22}^*=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2i}=\frac{(-1)i^2}{2i}=-\frac{i}{2},\ \alpha_{23}^*=\frac{D_3}{D}=\frac{-1}{2i}=\frac{i^2}{2i}=\frac{i}{2}$$

који онда гласи

$$|V_2\rangle=(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})=\frac{1}{2}(1,i,-i)\,.$$

iii) Трећи систем једначина

$$\langle V_3|v_j\rangle=\delta_{3j}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}\langle V_3\,|\,v_1\rangle=\delta_{31}\\\langle V_3\,|\,v_2\rangle=\delta_{32}\\\langle V_3\,|\,v_3\rangle=\delta_{33}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\langle(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\,|\,(1,0,i)\rangle=0\\\langle(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\,|\,(1,i,0)\rangle=0\\\langle(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\,|\,(0,1,1)\rangle=1\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha_{31}+i\,\alpha_{33}=0\\\alpha_{31}+i\,\alpha_{32}=0\\\alpha_{32}+\alpha_{33}=1\end{cases}}$$

записује се у матрично као

$$\begin{bmatrix}1&0&i\\1&i&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{31}\\\alpha_{32}\\\alpha_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

а решава се преко детерминанти. Детерминанта квадратне матрице опет је иста

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = i + i = 2i$$

али остале нису; детерминанта у којој се матрични елементи прве колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је сада облика

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -i^2 = 1$$

детерминанта у којој се матрични елементи друге колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна је

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-i) = i$$

а детерминанта у којој се матрични елементи треће колоне мењају матричним елементима матрице-колоне здесна гласи

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = i \; .$$

Компоненте трећег вектора реципрочног базиса су опет конјуговани комплексни бројеви

$$\alpha_{31}^* = \frac{D_1}{D} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \; \alpha_{32}^* = \frac{D_2}{D} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \; \alpha_{33}^* = \frac{D_3}{D} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

који онда има облик

$$|V_3\rangle = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) = \frac{1}{2}(i,1,1) \, .$$

(3.24) Нека су $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ и $\{|V_1\rangle,|V_2\rangle,\ldots,|V_n\rangle\}$ узајамно реципрочни базиси у унитарном простору $\mathbb{U}$. Нека је још дат и произвољан вектор

$$|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i|v_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\eta_i|V_i\rangle .$$

Доказати следеће изразе

(а) $\xi_i=\langle V_i|v\rangle$ односно $|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle V_i|v\rangle|v_i\rangle$;

(б) $\eta_i=\langle v_i|v\rangle$ односно $|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle v_i|v\rangle|V_i\rangle$.

(а) Почиње се са скаларним производом

$$\langle V_i|v\rangle=\left\langle V_i\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j|v_j\rangle\right.\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\langle V_i|v_j\rangle=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\delta_{ij}=\xi_i .$$

Сада се први горе дати ред може записати као

$$|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i|v_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle V_i|v\rangle|v_i\rangle .$$

* * *

(б) Опет се почиње са скаларним производом

$$\langle v_i|v\rangle=\left\langle v_i\left|\sum_{j=1}^{n}\eta_j|v_j\rangle\right.\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\langle v_i|v_j\rangle=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\delta_{ij}=\eta_i .$$

Сада се други горе дати ред може записати као

$$|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\eta_i|V_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle v_i|v\rangle|V_i\rangle .$$